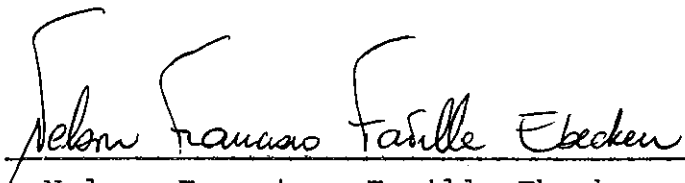


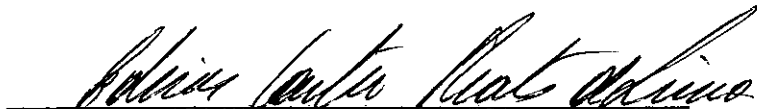
ANÁLISE DE ESTRUTURAS MARÍTIMAS E SISTEMAS  
FLEXÍVEIS CONSTITUÍDOS POR CABOS

MÁRCIO MARTINS MOURELLE

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS  
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO  
RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A  
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA  
CIVIL

Aprovada por:

  
Nelson Francisco Favilla Ebecken  
(Presidente)

  
Edison Castro Prates de Lima

  
Luiz Landau

  
Andrés Ludovico Halbritter

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL  
FEVEREIRO DE 1984

---

MOURELLE, MÂRCIO MARTINS

Análise de Estruturas Marítimas e Sistemas Flexíveis Constituídos por Cabos (Rio de Janeiro) 1984.

, p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M. Sc. , Engenharia Civil, 1984).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Cabos 2. Sistemas de Amarração. I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

---

Para minha esposa,  
Sylvia

A G R A D E C I M E N T O S

Ao professor Nelson Francisco Favilla Ebecken ,  
pela orientação e incentivo.

Aos meus pais e ao meu irmão, pelo apoio e estímulo.

À minha mãe, pelo amor e dedicação com que datilografou este trabalho.

Aos colegas Álvaro, Ana Lúcia, José Luiz e André,  
pela ajuda e amizade.

Ao Gilberto Luziê de Souza, pela ajuda.

Ao CNPq, pelo auxílio financeiro.

\*\*\*      \*\*\*      \*\*\*

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE  
EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

ANÁLISE DE ESTRUTURAS MARÍTIMAS E SISTEMAS

FLEXÍVEIS CONSTITUÍDOS POR CABOS

MÁRCIO MARTINS MOURELLE

FEVEREIRO DE 1984

ORIENTADOR: Prof. Nelson Francisco Favilla Ebecken

PROGRAMA: Engenharia Civil

R E S U M O

Este trabalho tem por objetivo a análise não-linear de estruturas marítimas constituídas por cabos, pelo método dos elementos finitos. A modelação dos cabos é feita através de um elemento curvo, baseado nas equações da catenária.

Elaborou-se um programa em linguagem FORTRAN, implementado no computador Burroughs B6700, que permite que se realizem análises estáticas, de vibrações livres, e dinâmicas pelo método de superposição modal ou pelo método direto. Estas análises podem ser feitas considerando-se, de forma automática, os efeitos de cargas de ondas, corrente, peso próprio e empuxo, em elementos de cabos e de pórtico espacial.

As características da onda são calculadas pela

teoria linear de Airy, enquanto a corrente é considerada através de um perfil linear. As forças induzidas são calculadas como função da velocidade relativa fluido-estrutura através da fórmula de Morison.

Para permitir a simulação de problemas reais, foram implementados facilidades como molas não-lineares, corpos rígidos esféricos e a prescrição de deslocamentos ao longo do tempo.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL  
FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER  
OF SCIENCE (M.Sc.)

ANÁLISE DE ESTRUTURAS MARÍTIMAS E SISTEMAS

FLEXÍVEIS CONSTITUÍDOS POR CABOS

MÁRCIO MARTINS MOURELLE

FEVEREIRO DE 1984

CHAIRMAN: Prof. Nelson Francisco Favilla Ebecken

DEPARTMENT: Civil Engineering

A B S T R A C T

This work presents a procedure to nonlinear analysis of marine structures with cable arrays, by using the finite element method. A catenary cable element is employed.

A computer program has been developed, using FORTRAN language and implemented in the system Burroughs B6700. This program allows statics analysis, free vibration, and dynamic analysis by modal superposition or direct integration method. Distributed loads acting on cable and framed structures from wave, current, self weight and buoyancy, can be evaluated automatically.

Wave characteristics are calculated by the linear Airy Theory. A linear profile for current velocity is assumed. The induced loads are evaluated using Morison's equation.

Simulation of real problems can be carried out by using nonlinear springs, spherical rigid bodies and prescribed displacements.



I N D I C E

	Pág.
I - INTRODUÇÃO	
1.1 - Aspectos Gerais .....	1
1.2 - Revisão da Literatura .....	4
II - FORMULAÇÃO DO ELEMENTO CURVO PARA CABO .....	9
2.1 - Introdução .....	9
2.2 - Equações Básicas da Catenária .....	13
2.3 - Matriz de Rigidez do Elemento .....	15
2.4 - Procedimento Iterativo .....	20
2.5 - Matriz de Rotação. Plano do Elemento .....	25
III - ANÁLISE NÃO-LINEAR PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINI	
TOS .....	34
3.1 - Análise Estática .....	34
3.2 - Cálculo da Resposta Dinâmica .....	36
3.2.1 - Procedimento Incremental-Iterativo .	
Método Direto .....	37
3.2.2 - Método Modal .....	40
3.2.3 - Deslocamento Prescrito .....	43
IV - CARGAS DE FLUIDO .....	45
4.1 - Teoria Linear de Airy .....	45
4.2 - Carga de Corrente .....	47
4.3 - Cálculo de Solicitações. Fórmula de Morison.	48
4.3.1 - Cargas em Elementos de Cabo .....	50

	Pág.
4.3.2 - Cargas em Elementos de Pórtico .....	57
4.4 - Massa Adicionada .....	63
4.5 - Corpos Rígidos Esféricos .....	64
V - ANÁLISE DE RESULTADOS .....	67
5.1 - Sistema de Cabos Suportado por uma Mola ....	68
5.2 - Estrutura Experimental SEACON II .....	71
5.3 - Análises de um Mangote Flexível .....	82
5.4 - Dinâmica de um Cabo Prê-Tensionado .....	94
5.5 - Resposta Dinâmica de uma Linha de Amarração.	101
VI - CONCLUSÃO .....	114
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	122
APÊNDICE A - RELAÇÕES ADICIONAIS PARA CATENÁRIA ELÁSTICA	128
APÊNDICE B - CÁLCULO DOS TERMOS DA MATRIZ DE FLEXIBILIDADE .....	136

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

#### 1.1. Aspectos Gerais

Os cabos têm encontrado inúmeras aplicações na engenharia offshore, devido às suas características de simplicidade e baixo custo. Suas principais aplicações são em sistemas de reboque, sistemas de suspensão e na amarração de corpos flutuantes.

Mais recentemente, com a necessidade de se projetarem plataformas para exploração e produção a grandes profundidades, o conceito de plataformas marítimas amarradas por cabos ganhou importância, devido à sua conveniência dos pontos de vista técnico e econômico.

Nas figuras (1.1), (1.2) e (1.3), são mostradas algumas ilustrações de plataformas amarradas por cabos. Nessas estruturas, os cabos têm importância fundamental nas características de operação e segurança.

Na engenharia, cabo é considerado como sendo um membro estrutural que possui uma relação diâmetro-comprimento tal, que os efeitos de flexão são desprezíveis, possuindo rigidez apenas na direção axial. Apesar deste aspecto simplificador, a análise de estruturas envolvendo cabos se torna complexa devido às não-linearidades envolvidas.

Os cabos resistem a um carregamento transversal através de uma mudança de forma. Para cabos instalados em forma de catenária, os deslocamentos podem ser da mesma ordem

de grandeza das dimensões da estrutura. Estes grandes deslocamentos introduzem uma não-linearidade no sentido geométrico.

Na análise de cabos em aplicações à engenharia offshore, existem outros aspectos que contribuem para tornar o problema ainda mais não-linear [20], que são:

a) O valor da força de arraste, que é função do quadrado da velocidade.

b) A influência da posição e orientação dos membros na força induzida pelo fluido.

c) A não-linearidade física dos cabos (Relação tensão-deformação).

d) A ausência de rigidez à compressão.

e) Condição de variação do ponto de contato com o fundo, para cabos instalados em forma de catenária.

f) Variação da posição da extremidade superior do cabo ao longo do tempo, devido ao movimento imposto pela ação do mar no corpo flutuante amarrado.

Motivados pela importância e larga aplicação dos cabos na engenharia offshore é que se procurou estudar os aspectos mais relevantes da análise não-linear de cabos pelo Método dos Elementos Finitos.

Esta análise envolve o desenvolvimento de um elemento curvo para cabo, baseado nas equações da catenária. Sua formulação é descrita em detalhe no Capítulo 2 deste trabalho.

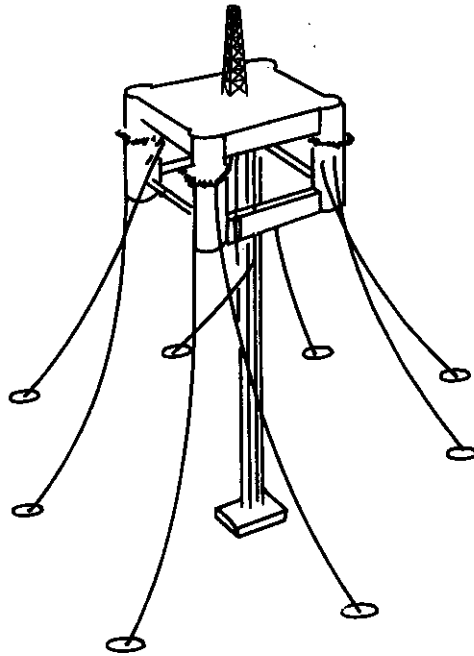


Figura 1.1  
Plataforma Semi-submersível

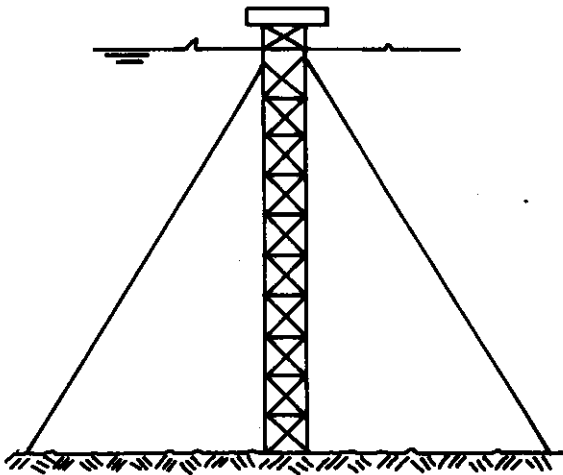


Figura 1.2  
Torre Estaiada

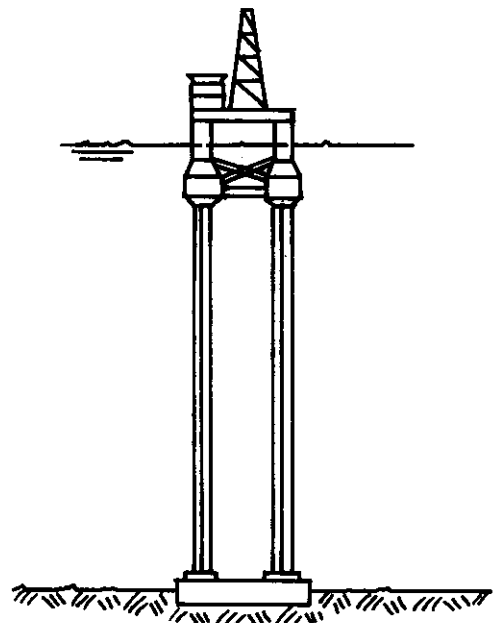


Figura 1.3  
Plataforma Travada Verticalmente  
("Tension-Leg")

## 1.2. Revisão da Literatura

O comportamento estrutural dos cabos tem sido assunto para inúmeras investigações. Dentro da categoria de a - bordagem através da discretização do contínuo, em que o método dos elementos finitos utilizado neste trabalho se enquadra, muitos elementos têm sido propostos na literatura.

Grande parte do trabalho de pesquisa realizado em torno dos cabos, tem sido através do Método dos Elementos Finitos, devido a suas características de grande generalidade e precisão. Alguns trabalhos fogem a esta regra, como o de Shore<sup>2</sup>, que utiliza-se de uma relação deformação-deslocamento não-linear e resolve as equações do movimento através do método das diferenças finitas. O método das reações imaginárias é utilizado por Kretschmer<sup>19</sup> na elaboração de um sistema computacional chamado DESADE, orientado para a análise de cabos submersos.

Argyris<sup>29</sup> propõe um método, utilizando um elemento reto, cuja parcela não-linear é representada pela matriz de rigidez geométrica que é proporcional à força do cabo. Este trabalho foi utilizado no projeto de coberturas empregadas nos Jogos Olímpicos de Munique, em 1972.

Griffiths<sup>26</sup> e Bathe<sup>31</sup>, utilizando o programa ADINA, relatam sua experiência com o elemento de treliça na resolução de problemas estáticos e dinâmicos, tendo este se revelado bastante sensível ao tamanho dos incrementos de carga em análises estáticas e do intervalo de tempo em análises dinâmicas.

Uma importante experiência é relatada por Leonard<sup>2 7</sup> que propôs um elemento reto para resolução de problemas de cabos com baixa tensão inicial e com uma pequena curvatura. Mais tarde, o próprio Leonard<sup>2 8</sup> proporia um elemento curvo, alegando a necessidade de se utilizar muitos elementos retos na discretização para casos em que se tinha uma curvatura mais acentuada, e que mesmo assim, os resultados não eram satisfatórios. Utilizando o elemento curvo concluiu que através dele se podia obter melhores resultados com um número menor de elementos.

Fellipa<sup>1 2</sup> propõe uma série de elementos e tece considerações a respeito da faixa de aplicação de cada um deles. O elemento quadrático é utilizado na análise de uma estrutura de cabos submersos sob ação de uma corrente de perfil parabólico.

Um elemento reto, formulado a partir dos tensores de Green e Kirchhoff foi proposto por Webster<sup>1 8</sup>, que tem seu trabalho orientado totalmente para aplicações em estruturas offshore. Este trabalho deu origem ao programa SEADYN. No Capítulo 5 são comparados alguns resultados obtidos através do elemento catenária com os do programa SEADYN.

Outro trabalho importante é o de Ozdemir<sup>2 2</sup>, que propõe uma família de elementos que se utilizam do tensor de Green e de matrizes de massa consistentes. Uma função de interpolação para o comprimento de arco é introduzida de forma que os deslocamentos que mantenham o comprimento de arco constante não introduzam deformações nos elementos. Jayaraman<sup>1</sup>, apresenta uma comparação entre os resultados obtidos com o e-

lemento catenária e o elemento de 3 nós de Ozdemir. Estas comparações são reproduzidas na seção (5.4).

Uma formulação unificada para elementos de viga e de cabo, em coordenadas Lagrangeanas totais, é apresentada por Schrefler<sup>25</sup>. Os elementos são isoparamétricos. Os autores têm dedicado especial atenção à determinação de cargas limi - tes que levam à perda da protensão dos cabos.

Outros autores que se utilizam de elementos cu - jas geometrias são descritas por funções polinomiais são Henghold<sup>24</sup> e Gambhir<sup>23</sup>.

Paralelamente aos trabalhos até aqui citados, ba - seados em elementos retos ou curvos com suas geometrias des - critas por funções polinomiais, desenvolveu-se o elemento cur - vo baseado nas equações da catenária utilizado neste trabalho.

A origem de sua formulação se encontra no traba - lho de O'Brien<sup>4</sup>, onde é apresentado um método numérico para de - terminação da configuração deformada de um cabo sujeito a for - ças concentradas, onde foram utilizadas as equações da catená - ria.

Mais tarde, O'Brien<sup>5</sup> depois de obter uma certa ex - periência utilizando-se do método implementado num computador e de resultados experimentais, constatou a validade do proce - dimento e seu caráter mais geral para consideração de cargas distribuídas tridimensionais. O método foi utilizado no proje - to de linhas de amarração de tanques de 36000 toneladas.

Baseado neste trabalho, Peyrot<sup>6</sup>, apresentou um subprograma para cálculo de forças nas extremidades de um ca - bo, dadas as suas projeções horizontal (H) e vertical (V) no



plano local. Este subprograma foi incorporado a um programa de análise não-linear, tendo sido realizadas muitas aplicações [6, 7, 8, 38].

Atualmente existem muitos sistemas computacionais orientados para a análise de estruturas de cabos, nos Estados Unidos e na Europa. Alguns desses sistemas são comentados ao longo deste trabalho, como os programas SEADYN, DESADE, LINDYN e o LARSA, que se vale de um elemento de treliça para representação dos cabos. A principal dificuldade encontrada na utilização deste programa está no fato de que ele elimina automaticamente da análise qualquer elemento de cabo em que ocorra força de compressão. Devido a este aspecto, o engenheiro é obrigado por vezes, a calcular a resposta repartindo o carregamento total em várias parcelas de forma a evitar que algum elemento seja eliminado. Isto pode onerar consideravelmente o custo de uma análise.

Na utilização do elemento catenária este problema não é transparente ao usuário, além de permitir uma representação mais real do problema físico. Ressalta-se no entanto, que a ocorrência do "afrouxamento" de um ou mais elementos de cabo durante uma análise possa retardar a convergência para a configuração de equilíbrio.

O sistema ADEP/ANCAB, implementado nos computadores da PETROBRÁS pela COPPE/UFRJ, utiliza-se do elemento catenária e possui algumas facilidades adicionais para análise de estruturas marítimas. Entre estas facilidades pode-se citar a possibilidade de se especificar molas não-lineares para simular o contato variável com o fundo, o cálculo automático de

cargas distribuídas provenientes de onda e corrente, e a possibilidade de se prescreverem corpos rígidos esféricos ligados aos nós. Atualmente estão sendo implementados, a possibilidade de se especificar um deslocamento, ao longo do tempo, a uma das extremidades do cabo, e soluções linearizadas para a análise de estruturas mais complexas.

## CAPÍTULO II

FORMULAÇÃO DO ELEMENTO CURVO PARA CABO

## 2.1. Introdução

O elemento curvo para cabo utilizado neste trabalho foi proposto por Peyrot e Goulois<sup>6</sup>, que montaram um subprograma baseado nas equações básicas da catenária e considerando a hipótese de pequenas deformações.

Este algoritmo, baseia-se em um trabalho realizado por O'Brien<sup>4, 5</sup>, que comprovou sua validade através de estudos experimentais e o utilizou na análise de cabos de amarração de tanques de fosfato a grandes profundidades.

Peyrot incorporou o subprograma a um programa de elementos finitos e realizou análises de linhas de transmissão [6] e reticulados de cabos [7]. Como aplicações na engenharia offshore, analisou mangotes flexíveis e linhas de amarração de uma plataforma semisubmersível [8].

O subprograma utilizado consiste de um processo iterativo para cálculo das forças nas extremidades do cabo, das suas projeções horizontal e vertical, a carga uniformemente distribuída atuando no elemento e as características físicas e geométricas do cabo.

A simbologia utilizada na identificação dos diversos parâmetros envolvidos no processo iterativo está resumida a seguir, de acordo com a figura 2.1.

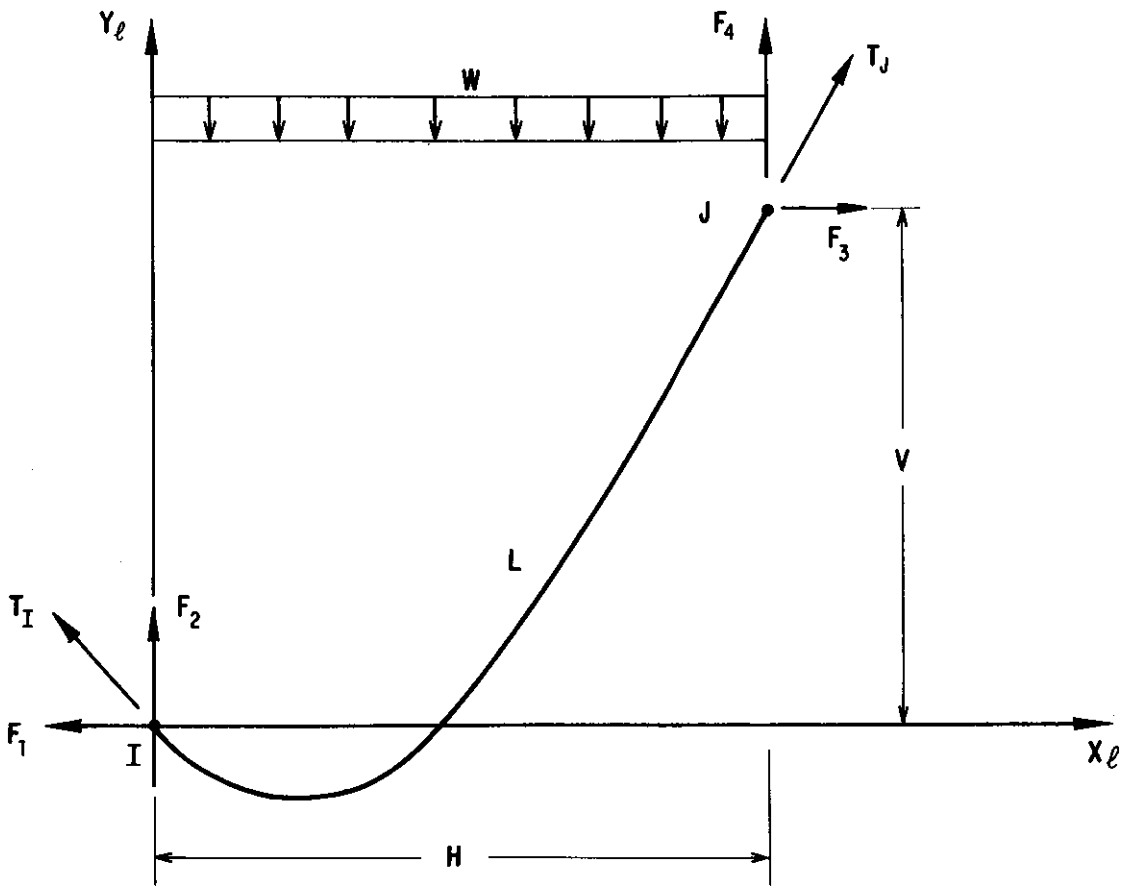


Figura 2.1

- |                      |   |
|----------------------|---|
| A                    | → área da seção transversal do cabo                                   |
| E                    | → módulo de elasticidade do cabo                                      |
| $F_1, F_2, F_3, F_4$ | → forças nas extremidades do elemento                                 |
| w                    | → carga uniformemente distribuída ao longo do comprimento do elemento |
| H                    | → projeção horizontal do elemento                                     |
| V                    | → projeção vertical do elemento                                       |
| L                    | → comprimento total do cabo   |
| $L_u$                | → comprimento inicial do cabo   |
| I, J                 | → indicam origem e final do cabo                                      |

$T_I, T_J$	→ tensões nas extremidades
$X_\ell, Y_\ell$	→ eixos locais
NPTS	→ número de pontos da catenária cujas coordenadas serão calculadas e impressas.

Para o cálculo da matriz de rigidez, Peyrot propunha que se chamasse o subprograma mais duas vezes após calculadas as forças nas extremidades. Nestas chamadas os valores de H e V seriam afetados por uma pequena variação, cada um por sua vez. Dessa forma seriam calculados os coeficientes da matriz de rigidez.

Para exemplificar, sejam  $F_1^0$  e  $F_2^0$  as forças na extremidade I, calculadas para as projeções H e V.

Fazendo-se 2 chamadas adicionais com:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 = H + \Delta H \\ V \end{array} \right\} \Rightarrow F_1^1 \text{ e } F_2^1$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} H \\ V_1 = V + \Delta V \end{array} \right\} \Rightarrow F_1^2 \text{ e } F_2^2$$

e mantendo-se os outros parâmetros constantes, os coeficientes da matriz de rigidez  $K_{IJ}$  seriam:

$$K_{IJ} = \begin{bmatrix} \frac{F_1^1 - F_1^0}{\Delta H} & \frac{F_1^2 - F_1^0}{\Delta V} \\ \frac{F_2^1 - F_2^0}{\Delta H} & \frac{F_2^2 - F_2^0}{\Delta V} \end{bmatrix}$$

Mais recentemente, Jayaraman <sup>1</sup> propôs que a matriz de rigidez fosse montada através de coeficientes de rigi

dez calculados no fim do processo iterativo para cálculo das forças nas extremidades.

Esta modificação foi incorporada ao programa não tendo prejudicado a precisão do algoritmo e sim contribuído para uma redução significativa do esforço computacional envolvido, já que dessa forma chama-se o subprograma apenas uma vez para o cálculo das forças nas extremidades e de coeficientes para montagem da matriz de rigidez.

Nos parágrafos (2.3) e (2.4) do presente capítulo são explicados o cálculo dos coeficientes da matriz de rigidez e o funcionamento do processo iterativo.

No desenvolvimento deste trabalho, especialmente no que se refere ao uso do elemento catenária, foi de grande importância o trabalho realizado por Creus<sup>3 0</sup>, que constatou a grande eficiência do elemento em problemas estáticos fortemente não-lineares.

Um exemplo analisado por Webster<sup>3 6</sup>, utilizando um elemento reto, apresentou problema de convergência em vários métodos de solução, tendo convergido apenas com o método de relaxação viscosa em 28 iterações. Para o elemento catenária a convergência foi alcançada em 12 iterações, utilizando-se o método de Newton-Raphson.

Outra experiência relatada por Creus, compara uma análise feita por Bathe e Cimento<sup>3 1</sup>, modelando um cabo com 10 elementos de treliça. Nesta análise, foi necessário que se dividisse a carga em 200 incrementos, tendo sido realizadas de 3 a 15 iterações para cada incremento. Com o elemento catenária alcançou-se a convergência em 12 iterações para um único incremento de carga.

Estas comparações serviram para demonstrar a capacidade do elemento catenária de convergir rapidamente para a posição de equilíbrio sem que seja necessário dividir a carga em incrementos, refinar muito a malha, ou utilizar um método de resolução mais refinado que o de Newton-Raphson.

Nos parágrafos seguintes é apresentada a formulação do elemento catenária.

## 2.2. Equações Básicas da Catenária

A equação diferencial da catenária pode ser obtida a partir da consideração das condições de equilíbrio nas direções horizontal e vertical num segmento de cabo, conforme indicado na figura 2.2.

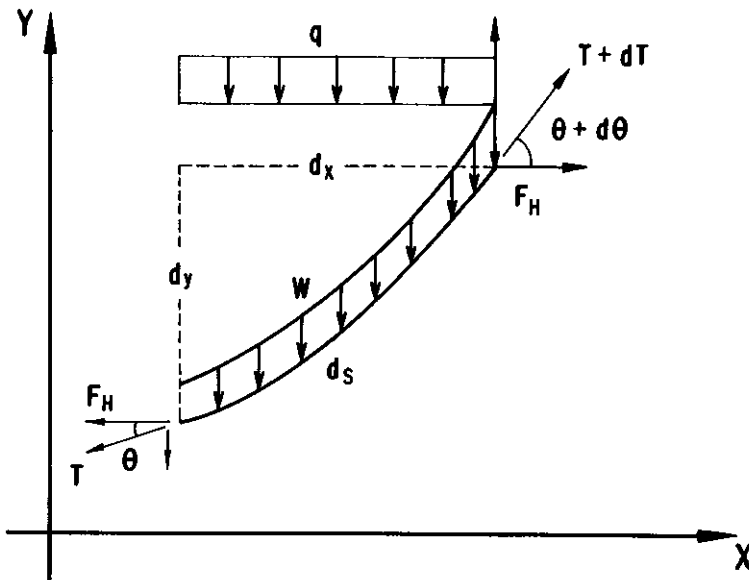


Figura 2.2

O equilíbrio na direção horizontal, considerando  $F_H$  constante, fornece:

$$\frac{d}{dx} (T \cos \theta) = 0 \quad (2.1)$$

Fazendo-se o equilíbrio na direção vertical tem-se:

$$\frac{d}{dx} (T \sin \theta) dx + q dx = 0 \quad (2.2)$$

Dividindo-se toda a expressão por  $F_H$ :

$$F_H \frac{d}{dx} (\operatorname{tg} \theta) = -q \quad (2.3)$$

Dado que:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx} \quad \text{e} \quad q = w \frac{ds}{dx} \quad (2.4)$$

Substituindo-se (2.4) em (2.3):

$$F_H \frac{d^2 y}{dx^2} dx + w ds = 0$$

Considerando-se, ainda, que  $ds^2 = dx^2 (1 + (\frac{dy}{dx})^2)$ :

$$F_H \frac{d^2 y}{dx^2} dx + w dx \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{w}{F_H} \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} = 0 \quad (2.5)$$

Integrando a eq. duas vezes e considerando as condições de contorno:

$$y_{x=0} = 0 \quad \text{e} \quad y_{x=H} = V$$

obtem-se

$$\frac{dy}{dx} = - \sinh \left( \frac{wx}{F_H} - \phi \right)$$

$$\therefore y = \frac{F_H}{w} \left\{ \cosh \phi - \cosh \left( \frac{2\lambda x}{H} - \phi \right) \right\} \quad (2.6)$$



onde:

$$\phi = \sinh^{-1} \left[ \frac{\lambda \left( \frac{V}{H} \right)}{\sinh \lambda} \right] + \lambda \quad (2.7)$$

$$e \quad \lambda = \frac{wH}{2F_H} \quad (2.8)$$

Para se obter o comprimento total de cabo  $L$ , calcula-se a integral:

$$L = \int_0^H \frac{ds}{dx} dx = \int_0^H \cosh \left( \frac{wx}{F_H} - \phi \right) dx$$

$$\therefore L = \frac{2F_H}{w} \sinh \lambda \cosh (\phi - \lambda) \quad (2.9)$$

A projeção vertical ( $V$ ) do elemento pode ser calculada fazendo-se  $x = H$  na expressão (2.6):

$$V = \frac{F_H}{w} [\cosh \phi - \cosh (2\lambda - \phi)]$$

$$\therefore V = \frac{2F_H}{w} \sinh \lambda \sinh (\phi - \lambda) \quad (2.10)$$

Das equações (2.9) e (2.10) obtêm-se a relação:

$$L^2 = V^2 + H^2 \frac{\sinh^2 \lambda}{\lambda^2} \quad (2.11)$$

Além das expressões básicas aqui obtidas, outras relações serão deduzidas para as projeções horizontal e vertical e para o comprimento total do elemento, levando-se em conta a deformação do cabo.

A partir dessas relações é que se monta o processo iterativo para cálculo das forças nas extremidades.

### 2.3. Matriz de Rigidez do Elemento

O cálculo da matriz de rigidez é efetuado a partir das equações da catenária e das relações adicionais obtidas por intermédio de integração das deformações ao longo do cabo.

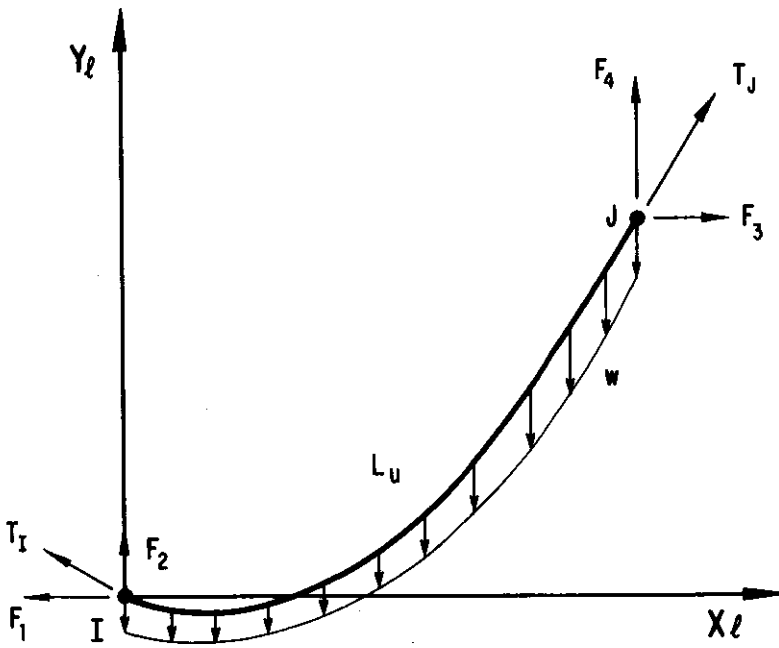


Figura 2.3

Fazendo o equilíbrio do elemento, da figura 2.3, tem-se:

$$F_4 = -F_2 + wL_u \quad (2.12)$$

$$F_3 = -F_1 \quad (2.13)$$

$$T_I = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \quad (2.14)$$

$$T_J = \sqrt{F_3^2 + F_4^2} \quad (2.15)$$

Colocando (2.12) e (2.13) em (2.15), tem-se a relação:

$$T_J = \sqrt{F_1^2 + (-F_2 + wL_u)^2} \quad (2.16)$$

As relações adicionais, obtidas por integração das deformações ao longo do elemento são:

$$H = -F_1 \left[ \frac{L_u}{EA} + \frac{1}{w} \ln \frac{F_4 + T_J}{T_I - F_2} \right] \quad (2.17)$$

$$V = \frac{1}{2EAw} (T_J^2 - T_I^2) + \frac{T_J - T_I}{w} \quad (2.18)$$

$$L = L_u + \frac{1}{2EAw} \left[ F_4 T_J + F_2 T_I + F_1^2 \ln \left( \frac{F_4 + T_J}{T_I - F_2} \right) \right] \quad (2.19)$$

As deduções das expressões (2.17), (2.18) e (2.19) se encontram no Apêndice A.

Observando as equações (2.17) e (2.18), conclui-se que se pode explicitar H e V como funções de  $F_1$  e  $F_2$ , precisando para isso apenas utilizar as relações (2.12), (2.13), (2.14) e (2.16).

Portanto,

$$H = H(F_1, F_2) \quad (2.20)$$

$$V = V(F_1, F_2) \quad (2.21)$$

Substituindo-se então, as equações de equilíbrio na expressão (2.17), tem-se:

$$H = -F_1 \left[ \frac{L_u}{EA} + \frac{1}{w} \ln \frac{-F_2 + wL_u + \sqrt{F_1^2 + (-F_2 + wL_u)^2}}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2} - F_2} \right] \quad (2.22)$$

Para V tem-se:

$$\therefore V = \frac{1}{2EAw} (-2F_2 wL_u + w^2 L_u^2) +$$

$$+ \frac{\sqrt{F_1^2 + (-F_2 + wL_u)^2} - \sqrt{F_1^2 + F_2^2}}{w} \quad (2.23)$$

A partir das equações (2.20) e (2.21), já explicitadas nas equações (2.22) e (2.23), pode-se obter relações da flexibilidade para o cabo. Imaginando pequenas variações em H e V, tem-se:

$$\delta H = \left( \frac{\partial H}{\partial F_1} \right) \delta F_1 + \left( \frac{\partial H}{\partial F_2} \right) \delta F_2 \quad (2.24)$$

$$\delta V = \left( \frac{\partial V}{\partial F_1} \right) \delta F_1 + \left( \frac{\partial V}{\partial F_2} \right) \delta F_2 \quad (2.25)$$

Escrevendo em forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \delta H \\ \delta V \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_3 & \xi_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta F_1 \\ \delta F_2 \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

onde a matriz dos  $\xi$ 's é a matriz de flexibilidade do cabo no plano.

Sendo:

$$\xi_1 = \frac{\partial H}{\partial F_1}, \quad \xi_2 = \frac{\partial H}{\partial F_2}, \quad \xi_3 = \frac{\partial V}{\partial F_1} \quad \text{e} \quad \xi_4 = \frac{\partial V}{\partial F_2}$$

A relação procurada, no entanto, é a matriz de rigidez, já que se precisa acoplar as relações de catenária a um procedimento de elementos finitos, modelo de deslocamentos.

$$\begin{Bmatrix} \delta F_1 \\ \delta F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta H \\ \delta V \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

Sendo a matriz dos  $\alpha$ 's a matriz de rigidez do cabo no plano. A matriz de rigidez ( $\alpha$ ) pode ser obtida por in - versão da matriz de flexibilidade ( $\xi$ ).

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_3 & \xi_4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\xi_1 \xi_4 - \xi_2 \xi_3} \begin{bmatrix} \xi_4 & -\xi_2 \\ -\xi_3 & \xi_1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Para cálculo dos valores da matriz de flexibili - dade  $\xi$  precisa-se derivar as expressões (2.22) e (2.23). Es - tas deduções são feitas no Apêndice B deste trabalho. As ex - pressões encontradas são:

$$\xi_1 = \frac{\partial H}{\partial F_1} = \frac{H}{F_1} + \frac{1}{w} \left[ \frac{F_4}{T_J} + \frac{F_2}{T_I} \right] \quad (2.29)$$

$$\xi_2 = \frac{\partial H}{\partial F_2} = \frac{F_1}{w} \left[ \frac{1}{T_J} - \frac{1}{T_I} \right] \quad (2.30)$$

$$\xi_3 = \frac{\partial V}{\partial F_1} = \frac{F_1}{w} \left[ \frac{1}{T_J} - \frac{1}{T_I} \right] \quad (2.31)$$

$$\xi_4 = \frac{\partial V}{\partial F_2} = - \frac{L_u}{EA} - \frac{1}{w} \left[ \frac{F_4}{T_J} + \frac{F_2}{T_I} \right] \quad (2.32)$$

Os coeficientes da matriz de rigidez no plano do elemento ficam:

$$\alpha_1 = \xi_4 / \text{DET} \quad (2.33)$$

$$\alpha_2 = \alpha_3 = -\xi_3 / \text{DET} \quad (2.34)$$

$$\alpha_4 = \xi_1 / \text{DET} \quad (2.35)$$

onde  $\text{DET} = \xi_1 \xi_4 - \xi_2 \xi_3$

A matriz de rigidez do cabo no sistema local pode então ser definida:

$$|KL| = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ & -\alpha_4 & 0 & \alpha_2 & \alpha_4 & 0 \\ & & \alpha_5 & 0 & 0 & \alpha_5 \\ \text{SIMÉTRICA} & & & -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 \\ & & & & -\alpha_4 & 0 \\ & & & & & \alpha_5 \end{bmatrix}$$

Para  $\alpha_5$ , valor que corresponde à rigidez fora do plano do cabo, adota-se o valor proposto por Jayaraman <sup>1</sup>.

$$\alpha_5 = \begin{cases} -\frac{F_1}{H}, & \text{se } H \neq 0 \\ 1.0, & \text{se } H = 0 \end{cases}$$

O chamado "plano do cabo" é definido de acordo com a carga uniformemente distribuída sobre ele atuante, conforme será apresentado na seção 2.5.

#### 2.4. Procedimento Iterativo

Na seção anterior, foram deduzidas expressões / que permitem a avaliação dos coeficientes da matriz de rigidez do elemento de cabo. Tais expressões são funções das forças nas extremidades.

Dentro do processo de resolução pelo método dos elementos finitos, usando-se o algoritmo de Newton-Raphson, o que se tem, a cada iteração, são as projeções H e V no plano

local e a carga atuante. As forças nodais são desconhecidas.

Estas forças precisam ser calculadas para montagem do vetor de cargas e, para isso, tem-se que recorrer a um processo iterativo, devido ao próprio caráter não-linear das equações da catenária. Neste processo, utilizam-se as equações (2.17) e (2.18) referentes às projeções do elemento no plano local.

O processo iterativo inicia-se a partir de valores estimados para as forças nas extremidades, de acordo com as equações:

$$F_1^0 = \frac{-wH}{2\lambda^0} \quad (2.36)$$

$$F_2^0 = \frac{w}{2} \left[ -V \frac{\cosh(\lambda^0)}{\sinh(\lambda^0)} + L_u \right] \quad (2.37)$$

onde:

$$\lambda^0 = \left[ 3 \left( \frac{L_u^2 - V^2}{H^2} - 1 \right) \right]^{1/2} \quad \text{se } L_u > (H^2 + V^2)^{1/2}$$

$$\lambda^0 = 0.2 \quad \text{se } L_u \leq (H^2 + V^2)^{1/2}$$

$$\lambda^0 = 10^6 \quad \text{se } H = 0$$

De posse dos valores iniciais, calcula-se  $H^0$  e  $V^0$  pelas equações (2.17) e (2.18) e compara-se com os valores conhecidos, obtendo:

$$\Delta H^0 = H - H^0 \quad (2.38)$$

$$\Delta V^0 = V - V^0 \quad (2.39)$$

Os valores  $\Delta H^0$  e  $\Delta V^0$  são testados para uma certa

tolerância especificada, no caso  $10^{-5}$ , e se não satisfeita a condição, calculam-se termos de correção para as forças  $F_1$  e  $F_2$  de acordo com as equações:

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_1^O \\ \Delta F_2^O \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta H^O \\ \Delta V^O \end{Bmatrix} \quad (2.40)$$

Os valores  $\Delta F_1^O$  e  $\Delta F_2^O$  são somados a  $F_1^O$  e  $F_2^O$  repetindo-se todo o processo, tantas vezes quantas forem necessárias para que o par  $\Delta H^i$  e  $\Delta V^i$  seja suficientemente pequeno. É especificado também um número máximo de iterações para o processo.

Os coeficientes ' $\alpha$ ' da última iteração são tomados para o cálculo da matriz de rigidez local do elemento, conforme o apresentado na seção (2.3).

Na figura (2.4) é apresentado o fluxograma do processo iterativo utilizado.



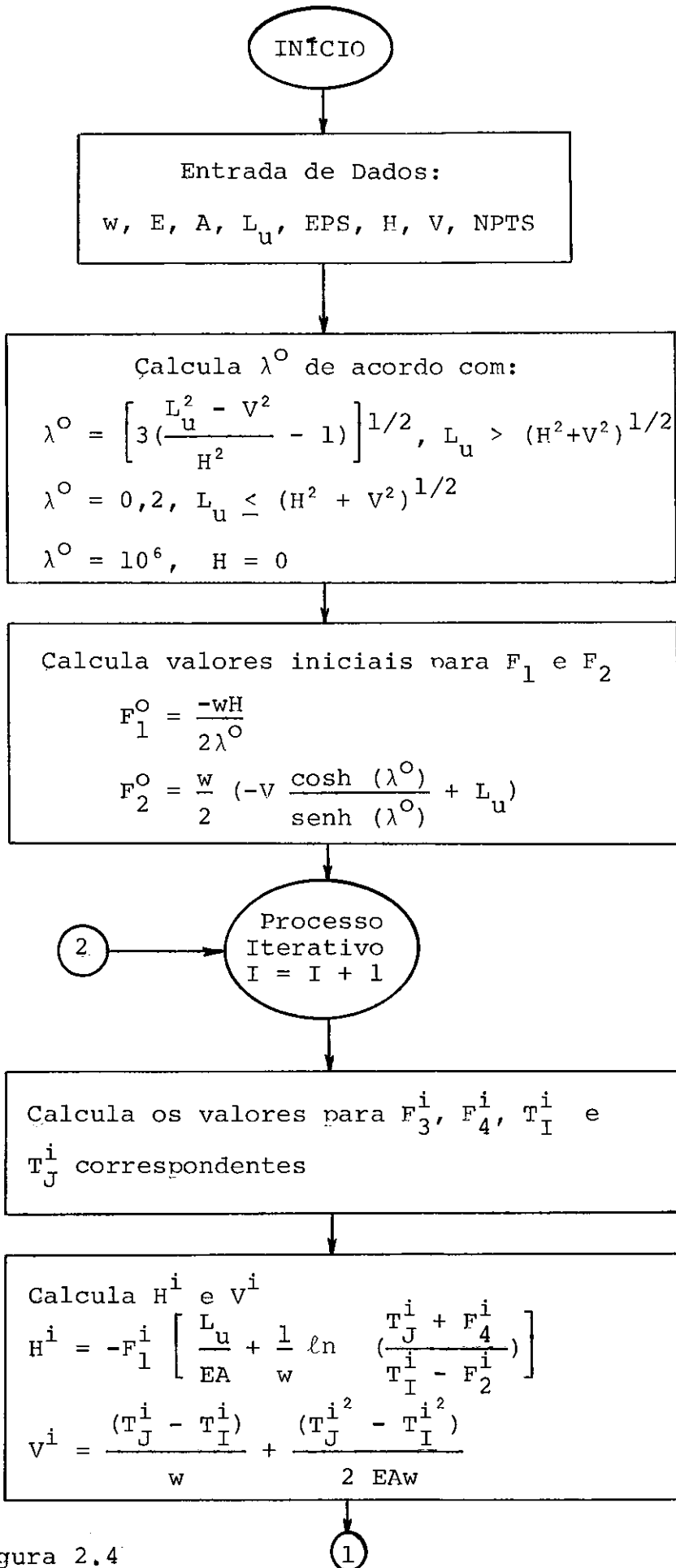


Figura 2.4

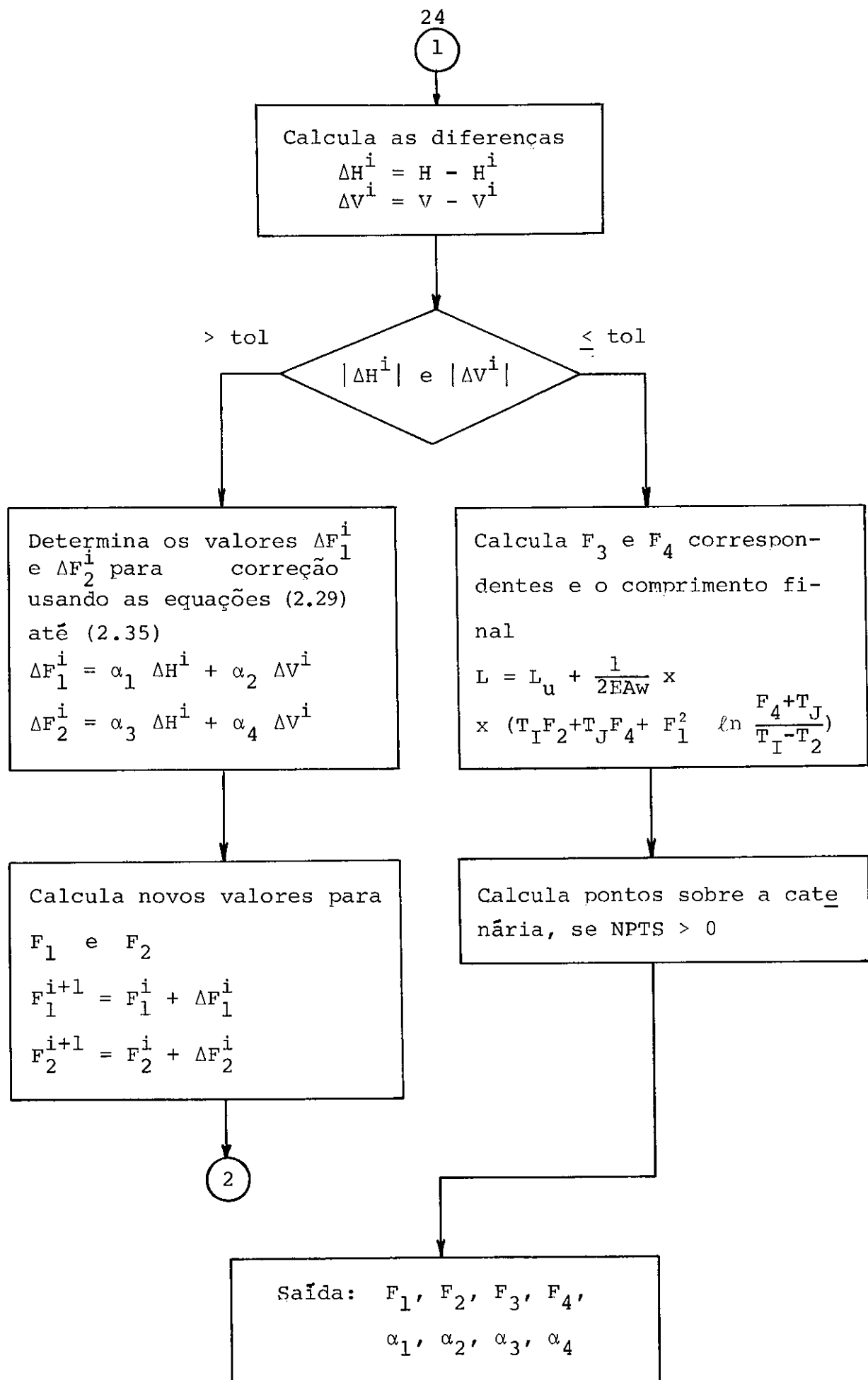


Figura 2.4

## 2.5. Matriz de Rotação - Plano do Elemento

Os eixos locais para o elemento de cabo curvo são definidos de acordo com o carregamento, de forma que, mesmo para problemas tridimensionais as forças e matrizes de rigidez são calculadas no plano definido como o "plano do cabo", que é o plano em que o cabo realmente trabalha.

O "plano do cabo" é definido pela reta direção de atuação do carregamento distribuído e a reta que une os nós do elemento. A origem é definida no nó inicial I. O eixo y-local é definido como tendo a mesma direção e sentido contrário ao do carregamento distribuído atuante. O eixo x-local é colocado no plano do cabo e no sentido do nó I para o nó J.

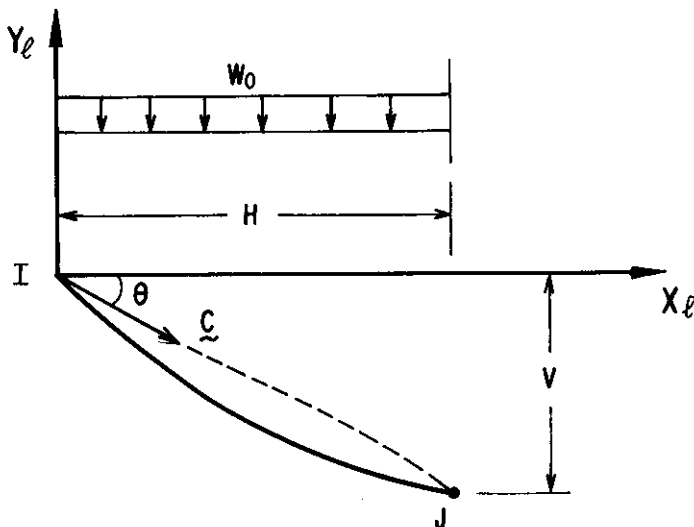


Figura 2.5

Através da figura 2.5 pode-se ter uma idéia de como é feita a definição dos eixos locais.

Para o cálculo da matriz de rotação e das projeções H e V, pode-se imaginar o elemento no espaço como na figura (2.6).

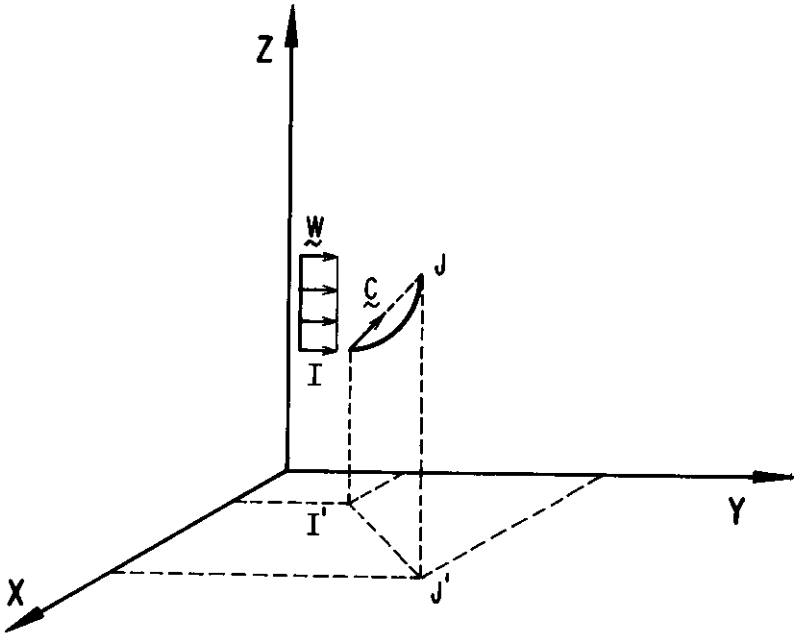


Figura 2.6

Define-se  $\underline{c}$  como o vetor unitário da reta que liga os nós I e J.

$$\underline{c} = \begin{Bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

e o vetor de cargas  $\underline{w}$  como sendo

$$\underline{w} = \begin{Bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

Seja  $\underline{e}_y$  o unitário na direção y-local.

Por definição:  $\underline{e}_y = \frac{-\underline{w}}{|\underline{w}|}$  (2.43)

$$|\underline{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = w_0$$

$$\therefore \underline{e}_y = -\frac{1}{w_0} \begin{Bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

O unitário na direção z-local, está fora do plano do cabo e pode ser obtido pelo produto vetorial:

$$\underline{e}_z = \underline{c} \times \underline{e}_y; \quad \text{"x" indica produto vetorial} \quad (2.45)$$

Sendo assim, para que se tenha um triedro direto para eixos locais, define-se o x-local como sendo:

$$\underline{e}_x = \underline{e}_y \times \underline{e}_z = \underline{e}_y \times \underline{c} \times \underline{e}_y \quad (2.46)$$

Ainda resta garantir a condição de que o eixo x-local fique orientado no sentido do nó I para o nó J, isto para que o valor de H seja sempre positivo.

Para satisfazer a condição acima, é preciso assegurar-se de que o ângulo entre os vetores  $\underline{e}_x$  e  $\underline{c}$  seja agudo, ou que o cosseno do ângulo seja positivo.

Pela propriedade do produto escalar:

$$\underline{e}_x \cdot \underline{c} = \underbrace{|\underline{e}_x|}_{=1} \underbrace{|\underline{c}|}_{=1} \cos\theta \quad (2.47)$$

$$\text{como } \underline{e}_x = \underline{e}_y \times \underline{c} \times \underline{e}_y$$

$$\Rightarrow \cos\theta = (\underline{e}_y \times \underline{c} \times \underline{e}_y) \cdot \underline{c} \quad (2.48)$$

A parcela entre parênteses da expressão dos cosenos de  $\theta$  é um triplo vetorial que possui a seguinte propriedade:

$$\underline{\underline{A}} \times (\underline{\underline{B}} \times \underline{\underline{C}}) = (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{C}})\underline{\underline{B}} - (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})\underline{\underline{C}} \quad (2.49)$$

Aplicando esta propriedade:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \left[ \underbrace{(\underline{\underline{e}}_y \cdot \underline{\underline{e}}_y)}_{=1} \underline{\underline{c}} - (\underline{\underline{e}}_y \cdot \underline{\underline{c}})\underline{\underline{c}} \right] \underline{\underline{c}} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\cos\theta = \left[ \underline{\underline{c}} - (\underline{\underline{e}}_y \cdot \underline{\underline{c}})\underline{\underline{c}} \right] \cdot \underline{\underline{c}} \quad (2.51)$$

Usando a propriedade distributiva no produto escalar:

$$\cos\theta = \underbrace{\underline{\underline{c}} \cdot \underline{\underline{c}}}_{=1} - (\underline{\underline{e}}_y \cdot \underline{\underline{c}}) \underbrace{\underline{\underline{c}} \cdot \underline{\underline{c}}}_{=1} \quad (2.52)$$

$$\cos\theta = 1 - (\underline{\underline{e}}_y \cdot \underline{\underline{c}}) \quad (2.53)$$

Examinando-se a expressão (2.53), vê-se que o produto escalar de 2 vetores unitários vale no máximo, a unidade, e portanto o seu valor nunca será negativo. Dessa forma, garante-se que o ângulo entre x-local e  $\underline{\underline{c}}$ , é agudo, ou seja, que o eixo x-local é orientado do nó I para o nó J. Este resultado foi obtido porque escolheu-se definir o unitário em z da forma como o foi na expressão (2.45). Caso contrário o resultado seria oposto.

Toda formulação até então obtida foi baseada na

definição dos vetores unitários  $\underline{c}$  e  $\underline{e}_y$ .

Para que se possa definir  $\underline{c}$  é preciso que os nós do elemento não sejam coincidentes. Neste caso, o eixo x-local será definido de forma arbitrária.

Na definição do unitário na direção y, é necessário que haja uma carga uniforme distribuída, aplicada ao longo do elemento, não nula, caso contrário o processamento será interrompido.

Para o eixo z-local, usou-se um produto vetorial entre os unitários  $\underline{c}$  e  $\underline{e}_y$ , porém a condição de que eles não sejam paralelos deve ser testada previamente. No caso do paralelismo entre estes vetores, carga atuando ao longo da direção IJ, a definição do eixo z-local será diferente. Primeiro testa-se para verificar se y-local é paralelo a y-global. Se for, define-se x-local coincidente com x-global e z-local sairá do produto vetorial entre os unitários em x e y locais. Se y-local não for paralelo a y-global, então x-local é obtido do produto vetorial y-local por y-global e, de posse de x e y locais, calcula-se z-local.

Tendo-se calculado a matriz de rotação, as variáveis H e V a serem utilizadas no procedimento iterativo para cálculo das forças nas extremidades, bem como da matriz de rigidez tangente do cabo, serão simplesmente as projeções nos eixos x-local e y-local do segmento que liga os nós I e J.

Todo o procedimento descrito até aqui para definição dos eixos locais do elemento de cabo e cálculo das variáveis H e V pode ser melhor entendido através do fluxograma apresentado a seguir.

- Fluxograma do Procedimento para Definição de Eixos Locais e das Variáveis H e V.

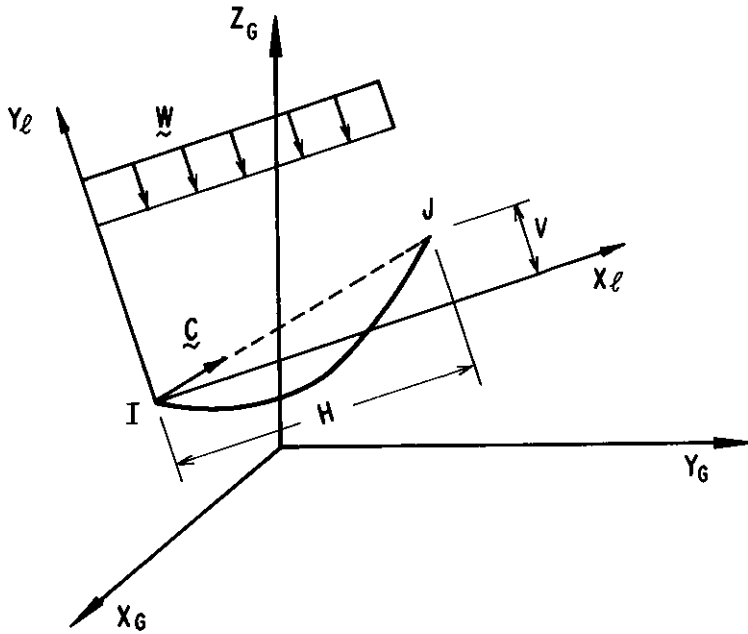
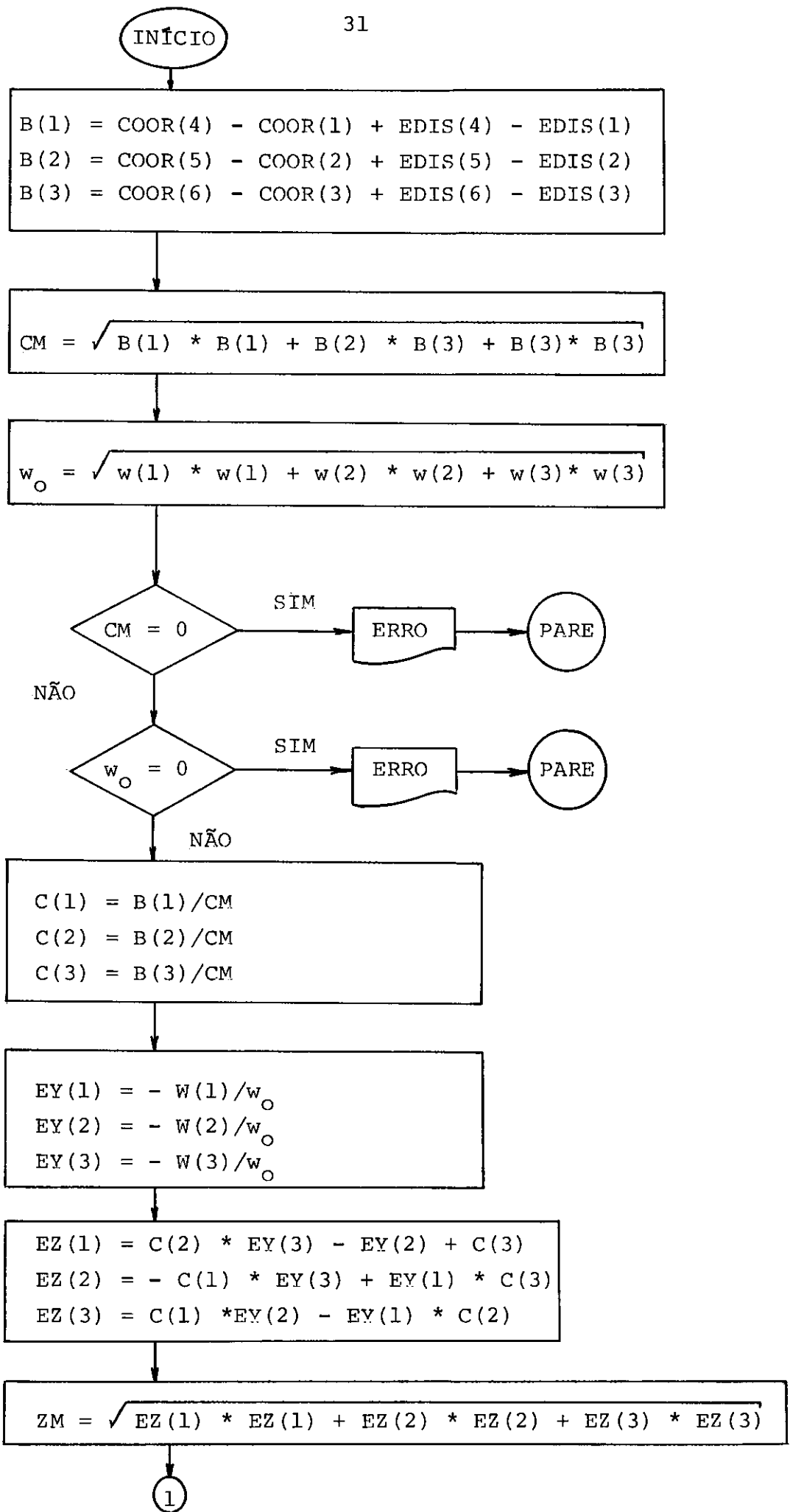


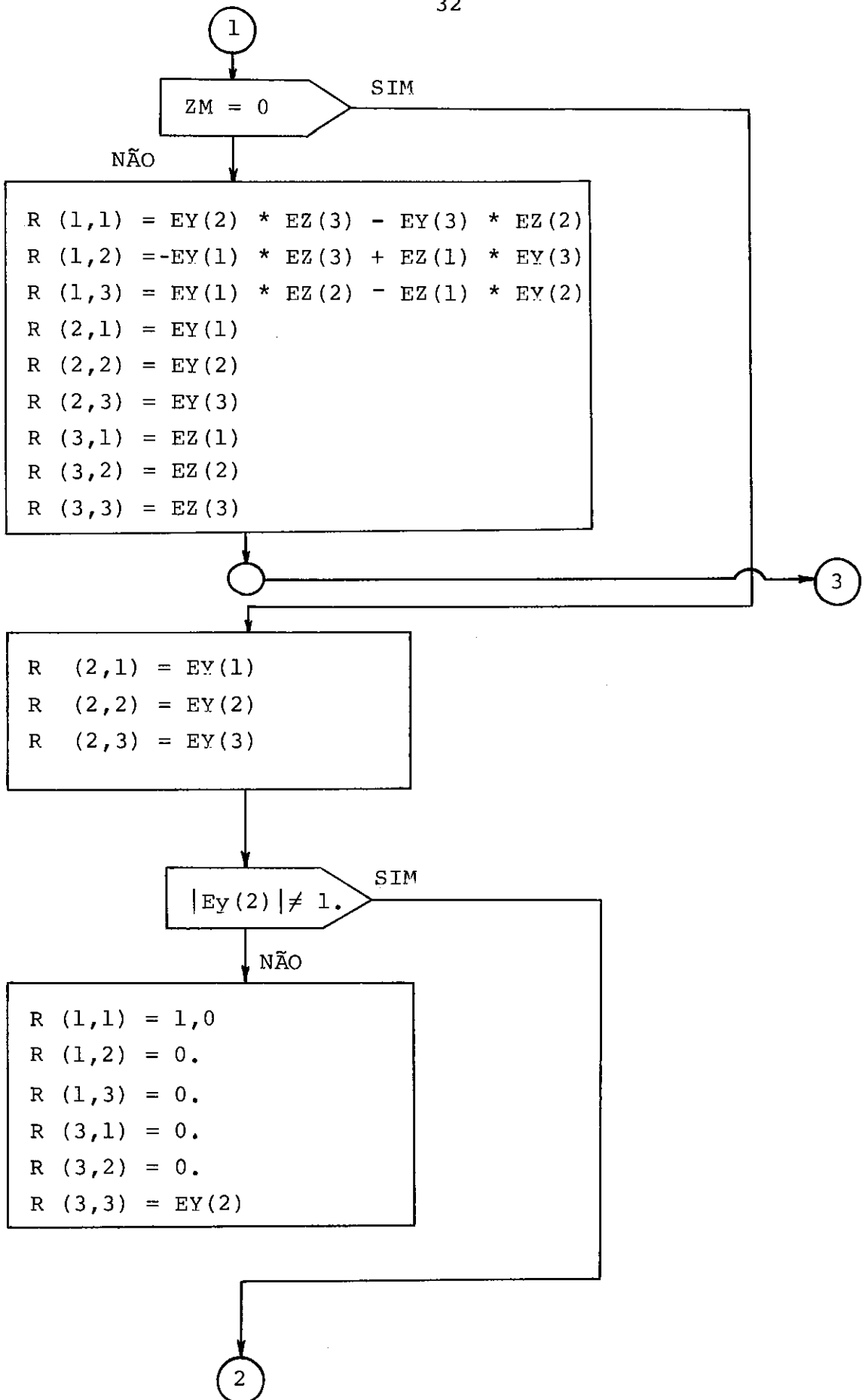
Figura 2.7

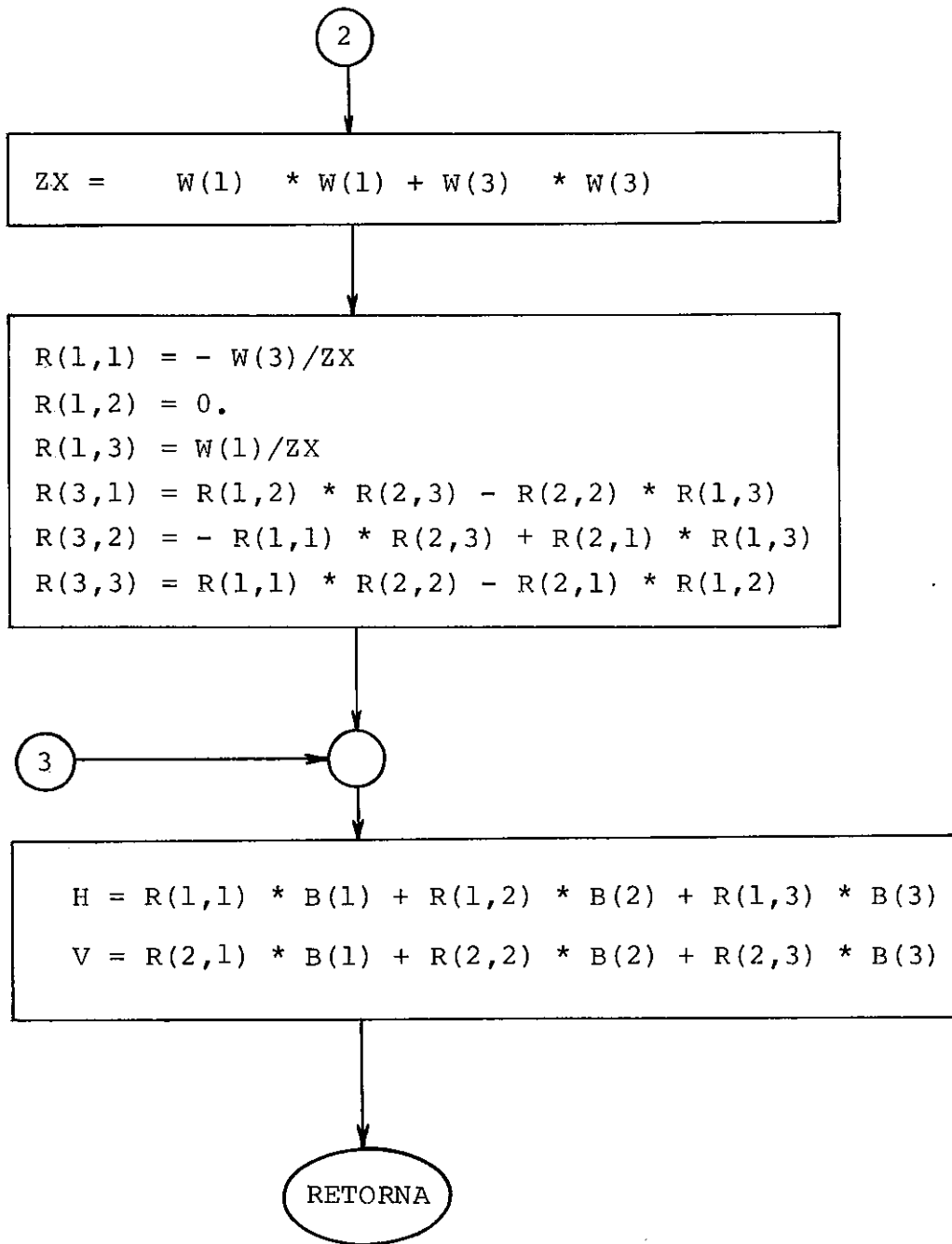
#### - Descrição das Variáveis

- $w(3)$  - vetor que representa o carregamento uniforme distribuído, atuando ao longo do cabo.
- $B(3)$  - vetor que liga os nós  $I$  e  $J$ . Vetor corda.
- $c(3)$  - vetor unitário nas direções  $I$  e  $J$ .
- $COORD(6)$  - vetor das coordenadas nodais
- $EDIS(6)$  - vetor de deslocamentos nodais
- $CM$  - módulo do vetor  $B(3)$
- $R(3,3)$  - matriz de rotação
- $EZ(3)$  - vetor unitário em z-local
- $EY(3)$  - vetor unitário em y-local.









## CAPÍTULO III

ANÁLISE NÃO-LINEAR PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Para resolução de problemas em estruturas que envolvam cabos, via de regra será imprescindível uma análise não-linear, devido à não-linearidade geométrica introduzida por grandes deslocamentos ou à não-linearidade física dos cabos.

O algoritmo de Newton-Raphson foi utilizado na solução numérica das equações algébricas não-lineares, tanto para problemas estáticos quanto para problemas dinâmicos.

## 3.1. Análise Estática

A resolução do problema estático é feita utilizando-se um procedimento incremental-iterativo baseado no algoritmo de Newton-Raphson em que pode-se escolher o número e valor dos incrementos da carga a serem utilizados, bem como o intervalo entre iterações sucessivas em que se pretende reavaliar a matriz de rigidez. O critério de dividir o carregamento aplicado em incrementos e do intervalo de reavaliação da rigidez fica a cargo do usuário.

O problema não-linear é resolvido, considerando-se uma série de trechos lineares. Esse processo é feito escrevendo as equações do equilíbrio em forma incremental [15,37].

$$\tilde{K} \cdot \Delta \tilde{U} = \Delta \tilde{R} \quad (3.1)$$

onde  $\tilde{K}$  é a matriz de rigidez tangente, que é função dos deslocamentos

$\Delta \tilde{U}$  é o deslocamento incremental obtido no trecho considerado

$\Delta \tilde{R}$  É a diferença entre as forças externas aplicadas e as forças resistentes devido ao estado de tensões dos elementos.

No equilíbrio, o termo  $\Delta \tilde{R}$  deve ser igual a zero, pois dessa forma cada nó está em equilíbrio: cargas externas aplicadas, somadas às forças aplicadas pelos elementos somam zero.

Se esta soma  $\Delta \tilde{R}$  é diferente de zero não há equilíbrio e haverá um campo de deslocamentos  $\Delta \tilde{U}$  por ela produzindo que será calculado pela equação (3.1). O problema é resolvido de forma iterativa pois os termos  $\tilde{K}$  e  $\Delta \tilde{R}$  dependem do campo de deslocamentos total  $\tilde{U}$ .

A equação escrita de forma incremental-iterativa:

$${}^{t+\Delta t} \tilde{K}^i \Delta \tilde{U}^{i+1} = {}^{t+\Delta t} \tilde{R} - {}^{t+\Delta t} \tilde{F}^i \quad (3.2)$$

onde  $(t+\Delta t)$  representa o incremento de carga que está sendo considerado. Vale dizer que  $\tilde{K}^i$  e  $\tilde{F}^i$  foram calculados como função de  $\tilde{U}^i$ . O vetor  ${}^{t+\Delta t} \tilde{R}$  representa o vetor de forças externas aplicadas nos nós.

O termo  $\tilde{F}^i$  é reavaliado a cada iteração  $i$

$$\tilde{F}^i = \sum \tilde{k}^i \tilde{d}^i \quad (3.3)$$

$\tilde{k}^i$  matriz de rigidez de cada elemento calculada em função dos deslocamentos  $\tilde{U}^i$

$\tilde{d}^i$  deslocamentos nos nós do elemento pertencentes ao campo de deslocamentos  $\tilde{U}^i$ .

O procedimento pode ser sumarizado:

- 1 - Calcula a matriz de rigidez tangente  $\tilde{K}^i$  como função de  $\tilde{U}^i$ , se especificado.

- 2 - Calcula as forças ( $\sum \tilde{k}^i \tilde{d}^i$ ) aplicadas pelos elementos distorcidos aos nós a que estão ligados, e espalha no vetor global  $\tilde{F}^i$ .
- 3 - Resolve a equação  $\tilde{K}^i \Delta \tilde{U}^{i+1} = \tilde{R} - \tilde{F}^i$
- 4 - Soma  $\Delta \tilde{U}^{i+1}$ :  $\tilde{U}^{i+1} = \tilde{U}^i + \Delta \tilde{U}^{i+1}$
- 5 - Testa convergência. Se não satisfeita, retorna ao item 1.

A convergência é testada considerando-se a relação entre a norma Euclidiana da variação do campo de deslocamentos e a norma Euclidiana do deslocamento total até a iteração considerada. O teste da convergência se faz:

$$\frac{|| \Delta \tilde{U}^{i+1} ||}{|| \tilde{U}^{i+1} ||} \leq \text{tol}$$

onde tol é a tolerância previamente especificada.

O processo descrito é conhecido por Método de Newton-Raphson. Se a matriz de rigidez total é reavaliada num intervalo de iterações maior que um, o processo é chamado de Newton-Raphson Modificado.

Na solução de problemas, pode-se optar por um esquema puramente iterativo, atualizando-se a rigidez a cada 'n' iterações. Quando houver problemas de convergência, deve-se partir a carga em incrementos, aplicando assim uma solução incremental-iterativa.

### 3.2. Cálculo da Resposta Dinâmica

A solução das equações diferenciais do movimento,

devido à ação de ondas, correntes e dos deslocamentos de um corpo flutuante amarrado, se constitui no objetivo para o cálculo da resposta dinâmica ao longo do tempo para estruturas de cabos.

Foram implementados 2 métodos para o cálculo da resposta dinâmica: o método da superposição modal e o método da integração direta das equações. Em ambos é empregado o algoritmo incremental-iterativo de Newton-Raphson Modificado.

Neste capítulo, apresenta-se a formulação utilizada para consideração de movimentos prescritos em uma das extremidades dos cabos.

### 3.2.1. Procedimento Incremental-Iterativo - Método Direto

Em geral, a análise não-linear dinâmica é feita de forma efetiva usando uma formulação incremental, na qual as variáveis são atualizadas incrementalmente, correspondendo a intervalos de tempo sucessivos. Nesta solução é necessário que as equações de equilíbrio sejam resolvidas corretamente a cada intervalo de tempo, sob o risco de se acumular erros que poderão não ser corrigidos posteriormente.

Para garantir a solução correta é necessário que se utilize intervalos de tempo muito pequenos. Procura-se então lançar mão de um processo iterativo para garantir o equilíbrio a cada intervalo de tempo, podendo-se assim utilizar intervalos de tempo maiores [14, 15, 31, 38].

A equação que traduz o equilíbrio dinâmico de sistemas estruturais não-lineares discretizados pelo método dos elementos finitos pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 \tilde{M}^{t+\Delta t} \ddot{\tilde{u}} + \tilde{C}^{t+\Delta t} \dot{\tilde{u}} + \tilde{K}(\tilde{u}^t) \Delta \tilde{u} &= \\
 &= \tilde{R}^{t+\Delta t} - \tilde{F}(\tilde{u}^t)
 \end{aligned}
 \quad (3.4)$$

Sendo:

$\tilde{M}$  - matriz de massa do sistema estrutural.

$\tilde{C}$  - matriz de amortecimento do sistema estrutural.

$\tilde{u}^{t+\Delta t}$ ,  $\ddot{\tilde{u}}^{t+\Delta t}$  - vetores velocidade e aceleração nodais correspondentes ao tempo  $t+\Delta t$ .

$\tilde{K}(\tilde{u}^t)$  - matriz de rigidez da estrutura calculada como função dos deslocamentos do tempo  $t$ .

$\Delta \tilde{u} = \tilde{u}^{t+\Delta t} - \tilde{u}^t$  - vetor de deslocamentos incrementais entre os instantes  $t$  e  $t+\Delta t$ .

$\tilde{R}^{t+\Delta t}$  - vetor de forças nodais equivalentes ao problema dinâmico no instante  $(t+\Delta t)$ .

$\tilde{F}(\tilde{u}^t)$  - vetor de forças nodais equivalentes ao estado de deformação dos elementos no instante  $t$ .

A integração da equação é feita utilizando o operador implícito de Newmark, que possui as seguintes hipóteses básicas:

$$\tilde{u}^{t+\Delta t} = \tilde{u}^t + \Delta t \cdot \dot{\tilde{u}}^t + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \ddot{\tilde{u}}^t + \alpha \Delta t^2 (\ddot{\tilde{u}}^{t+\Delta t} - \ddot{\tilde{u}}^t) \quad (3.5)$$

$$\dot{\tilde{u}}^{t+\Delta t} = \dot{\tilde{u}}^t + \Delta t \ddot{\tilde{u}}^t + \delta \Delta t (\ddot{\tilde{u}}^{t+\Delta t} - \ddot{\tilde{u}}^t) \quad (3.6)$$

Onde:  $\delta = 0,5$

$\alpha = 0,25.$



Usando-se as equações (3.5) e (3.6) na equação (3.4), pode-se obter os deslocamentos, velocidades e acelerações no tempo  $t+\Delta t$ .

A equação (3.4) é obtida através de uma linearização da resposta do sistema em torno de sua configuração para o tempo  $t$ . Como já foi dito, os erros provenientes desta linearização podem ser pequenos se forem usados intervalos de tempo também pequenos. O uso de intervalos de tempos maiores é possível se for adaptado um procedimento iterativo de controle de equilíbrio a cada intervalo de tempo [31].

O algoritmo utilizado para o processo iterativo é o de Newton-Raphson.

A formulação da equação do movimento através de procedimentos incrementais-iterativos poderá ser realizada a partir das seguintes definições:

$$t+\Delta t_{\tilde{u}}(k) = t+\Delta t_{\tilde{u}}(k-1) + \Delta t_{\tilde{u}}(k) \quad (3.7)$$

onde  $k$  é número da iteração.

As equações do movimento podem ser reescritas em sua forma incremental-iterativa como:

$$\begin{aligned}
 \tilde{M} \cdot {}^{t+\Delta t} \ddot{\tilde{u}}^{(k)} + \tilde{C} \cdot {}^{t+\Delta t} \dot{\tilde{u}}^{(k)} + \tilde{K}({}^{t+\Delta t} \tilde{u}^{(k-1)}) \Delta \tilde{u}^{(k)} = \\
 = {}^t R - \tilde{F}({}^t + \Delta t \tilde{u}^{(k-1)})
 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Os efeitos não-lineares podem ser reavaliados a cada iteração (Newton-Raphson), ou considerando-se a matriz de rigidez constante a cada intervalo de tempo (Newton-Raphson Modificado). Em qualquer das formulações o vetor de forças internas é atualizado sucessivamente e o incremento de deslocamentos nodais é corrigido até que satisfaça o critério de convergência:

$$\frac{|| \tilde{u}^{(k)} - \tilde{u}^{(k-1)} ||}{|| \tilde{u}^{(k)} ||} \leq \text{tolerância}$$

A matriz de amortecimento  $\tilde{C}$ , é considerada proporcional à matriz de massa ( $\tilde{C} = \alpha \tilde{M}$ ), sendo  $\alpha$  o fator de amortecimento que é dado por:

$$\alpha = 2 \omega \xi \quad (3.9)$$

onde:

$\omega$  - frequência natural do primeiro modo de vibração

$\xi$  - porcentagem do amortecimento crítico, relativo ao primeiro modo de vibração.

### 3.2.2. Método Modal

O método da superposição modal consiste na transformação das coordenadas do sistema estrutural em coordenadas modais, com a finalidade de reduzir o número de graus de liberdade do mesmo.

Este método é adequado para análise de problemas

em que o comportamento da estrutura pode ser representado por poucos modos normais [16].

Muitos autores têm aplicado este método na resolução de problemas não-lineares reais, com redução significativa do esforço computacional [39, 42, 43].

Em algumas das aplicações do método tem sido utilizado o algoritmo puramente iterativo de pseudo-forças [11]. Seu sucesso, porém, se restringe a problemas em que se tem uma não-linearidade localizada [43].

Foi implementado o procedimento incremental-iterativo de Newton-Raphson Modificado devido ao caráter fortemente não-linear dos problemas envolvendo cabos.

A redução do sistema de coordenadas físicas para coordenadas modais é feita através da matriz de transformação composta dos autovetores correspondentes às mais baixas frequências naturais do sistema estrutural.

Os autovalores e autovetores são calculados utilizando-se o método da iteração por subespaços [14, 16].

Sendo o algoritmo utilizado o mesmo que foi para o caso do Método Direto, pode-se reescrever a equação incremental-iterativa:

$$\tilde{M}^{t+\Delta t} \ddot{\tilde{u}}^{(k)} + \tilde{C}^{t+\Delta t} \dot{\tilde{u}}^{(k)} + \tilde{K}^* \Delta \tilde{u}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\tilde{R}-\tilde{F}({}^{t+\Delta t}\tilde{u}^{(k-1)}) \quad (3.10)$$

onde  $\tilde{K}^*$  é a matriz de rigidez avaliada no instante inicial da análise.

A transformação de coordenadas utilizada é:

$${}^{t+\Delta t}\tilde{u} = \sum_{i=r}^s \phi_{\tilde{i}} {}^{t+\Delta t}x_{\tilde{i}} \quad (3.11)$$

onde  $\tilde{x}_i^{t+\Delta t}$  é o i-ésimo deslocamento modal generalizado em  $t+\Delta t$  e

$$\tilde{K}^* \tilde{\Phi}_i = \omega_i^2 \tilde{M} \tilde{\Phi}_i, \quad i = r, \dots, s \quad (3.12)$$

Sendo  $\omega_i$  as frequências naturais (rad/s)

$\tilde{\Phi}_i$  os modos de vibração do sistema para o instante inicial.

Aplicando-se a eq. (3.11) na equação do equilíbrio em (3.10):

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{t+\Delta t}(k) + \tilde{\theta} \tilde{x}^{t+\Delta t}(k) + \Omega^2 \tilde{\Delta x}^{(k)} = \\ = \tilde{\Phi}^T (\tilde{x}^{t+\Delta t}_R - F(\tilde{x}^{t+\Delta t}_u(k-1))) \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde:

$\tilde{\theta} = 2 \omega_i \xi_i \delta_{ij}$ ,  $\xi_i$  é um parâmetro de amortecimento modal.

$\delta_{ij}$  delta de Kronecker.

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_r^2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \omega_s^2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Phi} = [\tilde{\Phi}_r \dots \tilde{\Phi}_s]$$

$$\tilde{x}^{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} t+\Delta t_{x_r} \\ \vdots \\ t+\Delta t_{x_s} \end{bmatrix}$$

A equação (3.13), desacoplada, pode ser integrada, utilizando-se o operador de Newmark.

### 3.2.3. Deslocamento Prescrito

Muitos problemas em estruturas oceânicas envolvem sistemas em que uma parte da estrutura tem movimento definido. Típicas situações em que isto ocorre são casos de corpos rebocados e corpos flutuantes amarrados por cabos, como navios, tanques e plataformas semi-submersíveis.

O processo de linearização empregado (seção 3.2.1) não pode ser utilizado sem que algumas modificações sejam efetuadas [18]. Podem ser empregados dois métodos que são comentados a seguir.

O primeiro método tem sido descrito por vários autores [16, 18, 44].

Considera-se a parte do sistema, cujos deslocamentos são prescritos como graus de liberdade restringidos. Processa-se uma reordenação dos graus de liberdade, de forma que:

$$\tilde{u} = \begin{Bmatrix} u_{\ell} \\ \vdots \\ u_r \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

onde  $u_{\ell}$  são os deslocamentos livres

$u_r$  são os deslocamentos conhecidos.

Escrevendo-se a equação do equilíbrio em termos de  $u_{\ell}$  e  $u_r$ , e considerando-se que as matrizes de massa e amortecimento utilizadas são discretas:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_l & \underline{\underline{M}}_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\underline{u}}_l \\ \text{---} \\ \ddot{\underline{u}}_r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{C}}_l & \underline{\underline{C}}_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\underline{u}}_l \\ \text{---} \\ \dot{\underline{u}}_r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{ll} & \underline{\underline{K}}_{lr} \\ \text{---} & \text{---} \\ \underline{\underline{K}}_{lr}^t & \underline{\underline{K}}_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}_l \\ \text{---} \\ \underline{u}_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{f}_l \\ \text{---} \\ \underline{f}_r \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

Efetuando-se os produtos matriciais tem-se 2 equações:

$$1a.) \underline{\underline{M}}_l \ddot{\underline{u}}_l + \underline{\underline{C}}_l \dot{\underline{u}}_l + \underline{\underline{K}}_{ll} \underline{u}_l = \underline{f}_l - \underline{\underline{K}}_{lr} \underline{u}_r \quad (3.16)$$

O termo  $\underline{\underline{K}}_{lr} \underline{u}_r$  é calculado para cada elemento e espalhado no vetor de cargas global.

$$2a.) \underline{\underline{M}}_r \ddot{\underline{u}}_r + \underline{\underline{K}}_{lr}^t \underline{u}_l + \underline{\underline{K}}_{rr} \underline{u}_r + \underline{\underline{C}}_r \dot{\underline{u}}_r = \underline{f}_r \quad (3.17)$$

Pode ser utilizado para calcular as reações de apoio  $\underline{f}_r$  para os graus de liberdade prescritos.

O segundo método, descrito por Webster<sup>18</sup>, consiste em simplesmente levar o nó considerado à posição prescrita a cada intervalo de tempo. Já que o método utilizado se vale de um processo iterativo, este se encarregaria de corrigir as equações a cada intervalo de tempo.

## CAPÍTULO IV

CARGAS DE FLUIDO

A análise de casos práticos envolvendo estruturas marítimas com cabos precisa ser feita levando-se em conta a interação do mar com a estrutura.

As cargas provenientes desta interação se constituem num dos mais importantes fatores de não-linearidade em problemas envolvendo cabos submersos (ver Cap. I). Estas cargas são resultantes da ação de ondas, correntes, empuxo e da própria resistência da água ao movimento das estruturas.

As velocidades e acelerações do fluido devido ao movimento da onda são calculadas pela Teoria Linear de Airy. As cargas nos elementos são avaliados utilizando-se a fórmula de Morison.

É levado em conta, também, o efeito de massa d'água adicionada nos elementos.

## 4.1 - Teoria Linear de Airy

A simplificação principal no desenvolvimento da teoria linear de Airy consiste em se supor que a elevação da crista é muito pequena em relação ao comprimento da onda.

Obtém-se a função  $\phi$  do potencial de velocidades e o perfil  $\xi$  que define a crista:

$$\phi(x, z, t) = \frac{ag}{w} \cdot \frac{\cosh[k(z+d)] \cdot \sin(kx - wt)}{\cosh(k.d)} \quad (4.1)$$

$$\xi(x, t) = a \cos(kx - wt) \quad (4.2)$$

onde  $w$  = frequência natural da onda

$k$  = número de onda

$x, z$  = coordenada do ponto

A constante da onda  $k$ , é calculada a partir de uma relação não-linear:

$$w^2 = k \cdot g \tanh(k \cdot d) \quad (4.3)$$

Resolvendo-se por iterações sucessivas, obtém-se  $k$  e assim (4.1) e (4.2) ficam determinadas.

As velocidades e acelerações no meio fluido são calculadas por derivação de (4.1), obtendo-se:

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = aw \frac{\cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \cos(kx-wt) \quad (4.4)$$

$$v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = aw \frac{\sinh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \sin(kx-wt) \quad (4.5)$$

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} = aw^2 \frac{\cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \cdot \sin(kx-wt) \quad (4.6)$$

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} = -aw^2 \frac{\sinh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \cos(kx-wt) \quad (4.7)$$

onde

$v_x$  = velocidade na direção  $x$

$v_z$  = velocidade na direção  $z$

$a_x$  = aceleração na direção  $x$

$a_z$  = aceleração na direção  $z$ .

Com estas equações é possível avaliar as velocidades e acelerações decorrentes do movimento da onda para qualquer ponto de coordenadas  $(x, z, t)$  no meio fluido. Estas coordenadas estão no referencial de ondas, conforme indicado na figura (4.1).



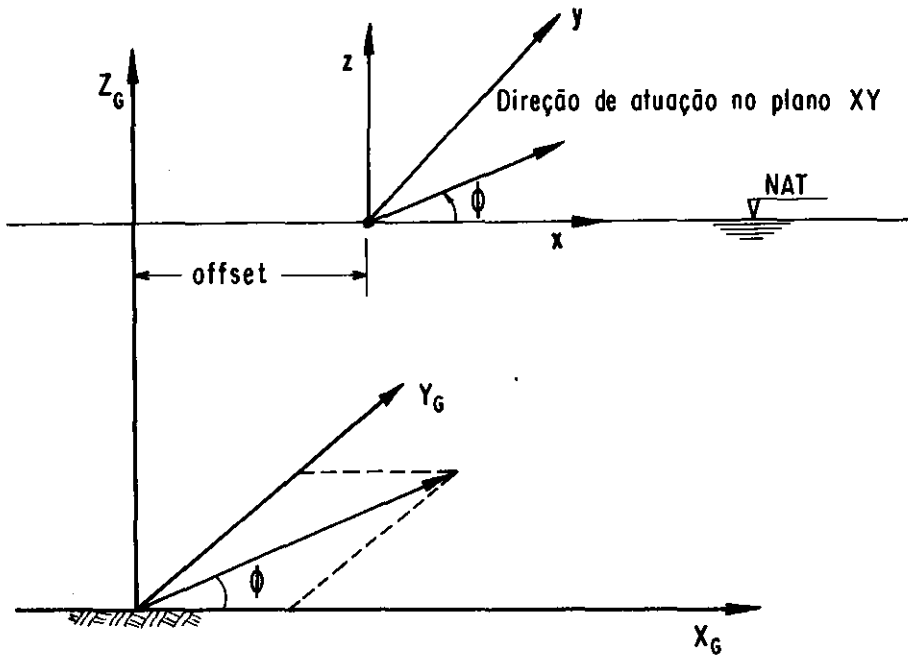


Fig. 4.1

OFFSET - distância da crista da onda à origem do eixo global

$\phi$  - ângulo de atuação da onda em relação ao eixo x-global

$X_G, Y_G, Z_G$  - eixos globais

$x, y, z$  - eixos do referencial de ondas

NAT - nível de águas tranquilas.

#### 4.2. Carga de Corrente

Além da geração dos campos de velocidade e acelerações produzidos pela onda, faz-se necessário também levar - se em conta os efeitos devidos a correntes marítimas.

A velocidade da corrente deve ser fornecida junto à superfície e junto ao fundo, bem como seu ângulo de atuação em relação ao eixo x-global. As velocidades ao longo da profundidade são calculadas interpolando-se linearmente entre estes valores.

Vale ressaltar, que a corrente é considerada sempre atuando no plano horizontal dos eixos X e Y globais, o que obriga a que se considere o eixo Z global como vertical.

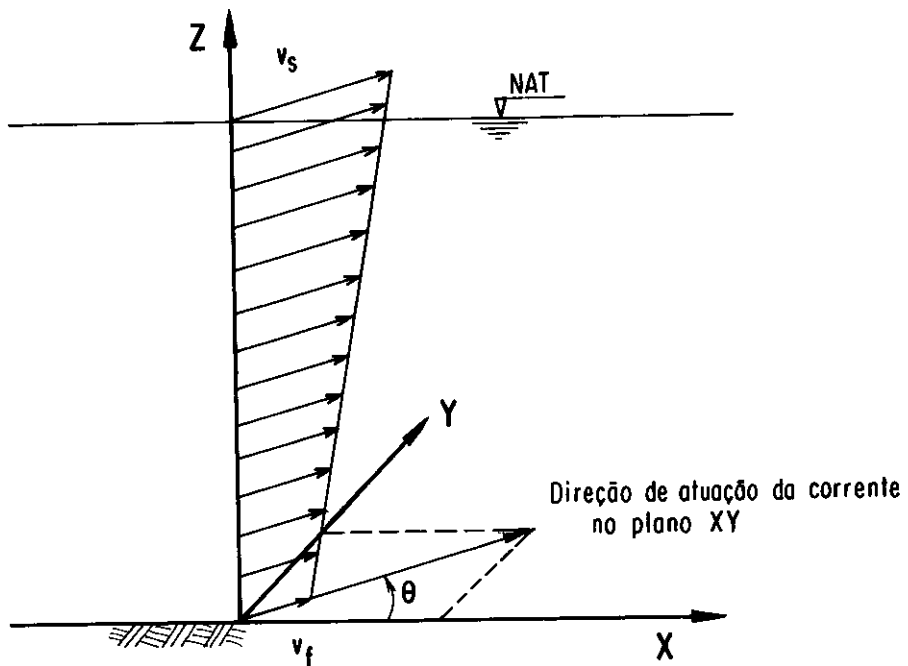


Figura 4.2

#### 4.3 - Cálculo de Solicitações - Fórmula de Morison

Na análise de estruturas offshore é muito importante a consideração das cargas provenientes de ondas e correntes sobre os membros estruturais. O cálculo das forças induzidas realiza-se em duas etapas. Na primeira calculam-se os campos de velocidades e acelerações do fluido em movimento. Na segunda, essas velocidades e acelerações devem ser transformadas em forças atuantes sobre os cabos e barras da estrutura.

Existem duas alternativas básicas para se transformar os campos de velocidades e acelerações em forças atuantes. A primeira leva em conta o fato de que a presença do componente estrutural modifica as características da onda inci -

dente. Se isto sucede, as forças devem ser calculadas usando-se a teoria da difração, caso contrário os membros são considerados como esbeltos e a fórmula de Morison pode ser utilizada.

O limite de utilização das duas teorias é dado pela relação  $\lambda/d$ , conforme indicado na Figura (4.3) onde  $\lambda$  é o comprimento de onda e  $d$  o diâmetro do membro.

Para o caso de cálculo de solicitações em barras e cabos, utiliza-se apenas a fórmula de Morison.

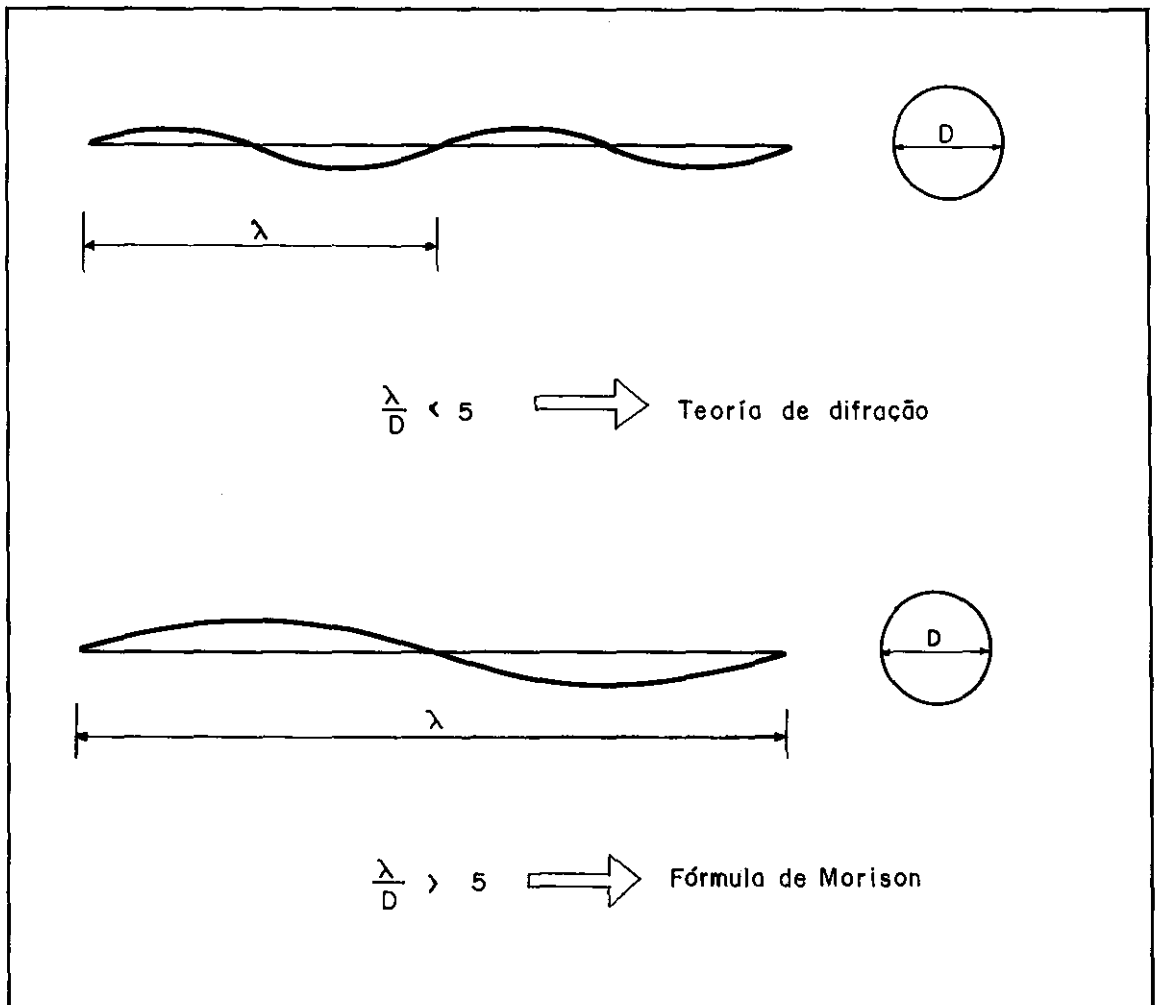


Figura 4.3

## 4.3.1 - Cargas em Elementos de Cabo

A fórmula de Morison é aplicada a elementos de cabos considerando-se o elemento como a reta que liga os nós. Esta aproximação pode ser compensada através do uso de um número maior de elementos. Em sua forma vetorial, a fórmula de Morison pode ser expressa para cargas distribuídas em cabos [18]:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{Bmatrix} &= C_M \rho_w \frac{\pi}{4} d^2 \begin{Bmatrix} a_{nx} \\ a_{ny} \\ a_{nz} \end{Bmatrix} + \\
 &+ \frac{1}{2} C_N \rho_w d v_n \begin{Bmatrix} v_{nx} \\ v_{ny} \\ v_{nz} \end{Bmatrix} + \\
 &+ \frac{1}{2} C_T \rho_w d v_t \begin{Bmatrix} v_{tx} \\ v_{ty} \\ v_{tz} \end{Bmatrix} \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

onde

$C_M$  - coeficiente de inércia

$\vec{w}$  - vetor de forças distribuídas

$C_N$  - coeficiente de arraste na direção normal

$C_T$  - coeficiente de arraste na direção tangencial

$\rho_w$  - densidade do fluido

- $d$  - diâmetro do elemento  
 $\vec{a}_n$  - vetor de acelerações das partículas fluidas normais aos elementos  
 $\vec{v}_n$  - vetor velocidade relativa fluido-estrutura na direção normal  
 $v_n$  - módulo do vetor  $\vec{v}_n$   
 $\vec{v}_t$  - vetor velocidade relativa fluido-estrutura na direção tangencial ao elemento  
 $v_t$  - módulo do vetor  $\vec{v}_t$

Os coeficientes normal e tangencial de arraste podem ser fornecidos pelo usuário ou calculados automaticamente pelo programa como função do número de Reynolds, de acordo com Webster [18].

Para a direção normal:

$$R_e = \frac{v_n \cdot d}{\mu} \quad (4.9)$$

Sendo

$v_n$  - velocidade normal - módulo

$d$  - diâmetro do membro

$\mu$  - viscosidade cinemática do fluido

$$R_e < 0.1 \Rightarrow C_N = 0$$

$$0.1 \leq R_e \leq 400 \Rightarrow C_N = 0.45 + 5.93/(R_e^{0.33})$$

$$400 < R_e \leq 10^5 \Rightarrow C_N = 1.27$$

$$R_e > 10^5 \Rightarrow C_N = 0.3$$

Para a direção tangencial:

$$R_e = \frac{\vec{v}_t \cdot \vec{d}}{\mu} \quad (4.10)$$

Sendo  $v_t$  - velocidade tangencial - módulo

$$R_e \leq 0.1 \Rightarrow C_T = 0$$

$$0.1 < R_e \leq 100.55 \Rightarrow C_T = 1.88 / (R_e^{0.74})$$

$$R_e > 100.55 \Rightarrow C_T = 0.062$$

Os vetores  $\vec{a}_n$ ,  $\vec{v}_n$  e  $\vec{v}_t$  podem ser obtidos através de algumas operações vetoriais:

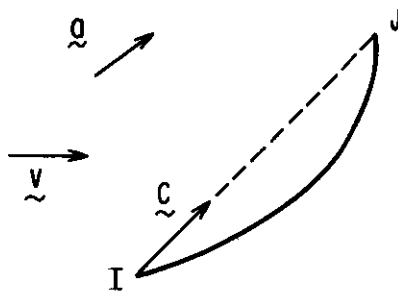


Figura 4.4

Sendo:  $\vec{v}$  - velocidade da partícula fluida. Soma vetorial dos efeitos de ondas e corrente.

$\vec{a}$  - aceleração da partícula fluida.

$\vec{c}$  - vetor unitário na direção da reta que liga os nós.

$$\tilde{a}_n = \tilde{c} \times \tilde{a} \times \tilde{c} \quad (4.11)$$

$$\tilde{v}_n = \tilde{v}_{wn} - \tilde{v}_{sn} \quad (4.12)$$

onde

$\tilde{v}_{wn}$  - velocidade do fluido normal ao elemento

$\tilde{v}_{sn}$  - velocidade da estrutura na direção normal ao elemento.

$$\tilde{v}_t = \tilde{v}_{wt} - \tilde{v}_{st} \quad (4.13)$$

onde

$\tilde{v}_{wt}$  - velocidade do fluido na direção tangencial ao elemento

$\tilde{v}_{st}$  - velocidade da estrutura na direção tangencial.

$$\tilde{v}_{wt} = (\tilde{v}_w \cdot \tilde{c}) \tilde{c}^* \quad (4.14)$$

$$\tilde{v}_{wn} = \tilde{v} - \tilde{v}_{wt} \quad (4.15)$$

Através destas equações se encontram as componentes normal e tangencial em relação ao elemento.

A carga distribuída atuando sobre o elemento de cabo deve ser constante. As velocidades e acelerações do fluido são calculadas nos nós dos elementos e suas projeções são avaliadas conforme apresentado. São feitos então, os cálculos das velocidades relativas nas direções normal e tangencial ao elemento junto aos nós. A partir dessas velocidades se calculam as cargas nos nós pela fórmula de Morison e a carga uniforme distribuída ao longo do elemento é obtida fazendo-se a média aritmética entre os valores nodais em cada direção.

\* '.' - indica produto escalar.

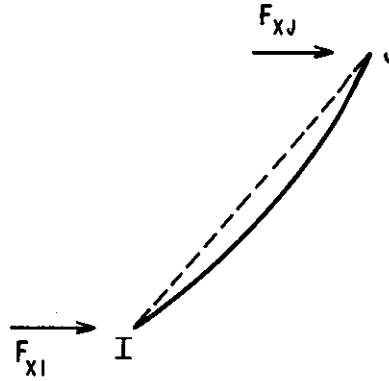


Figura 4.5

Dessa forma se calculados:

$$\tilde{w}_I = \begin{Bmatrix} f_{xI} \\ f_{yI} \\ f_{zI} \end{Bmatrix} \quad e \quad \tilde{w}_J = \begin{Bmatrix} f_{xJ} \\ f_{yJ} \\ f_{zJ} \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

A carga uniforme distribuída  $\tilde{w}$  será:

$$\tilde{w} = \frac{\tilde{w}_I + \tilde{w}_J}{2} \quad (4.17)$$

O cálculo da força em um dado nó é feito mediante um teste que indica se o nó está ou não submerso, concluindo-se assim se o elemento em questão está seco, totalmente molhado ou parcialmente molhado.

Para o caso do elemento parcialmente molhado é calculado seu comprimento molhado e a carga calculada no nó molhado, multiplicada pela razão entre o comprimento molhado e o comprimento seco, será a carga uniforme aplicada.

$$\tilde{w} = \tilde{w}_J \times \frac{a_{lm}}{al} \quad (4.18)$$



$al_m$  - comprimento molhado

$al$  - comprimento seco

$w_J$  - carga calculada para o não molhado.

Uma forma de contornar essa aproximação  a de se usar uma maior discretização na região próxima ¢ superfície.

#### - Cargas de Peso Próprio e Empuxo

Ao vetor  $w$ , que traz os efeitos de ondas e correntes, deverá ser adicionada uma força de peso próprio e empuxo que  considerada atuando ao longo do eixo Z-global.

$$\tilde{w} = \tilde{w} + \tilde{w}_b \quad (4.19)$$

$$w_b = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_b \end{Bmatrix}$$

sendo

$$f_b = -\rho \cdot g \cdot A \text{ - para o membro seco}$$

$$f_b = \left\{ [(\rho_w - \rho) \cdot l_m + \rho \cdot (l - l_m)] / l \right\} \cdot g \cdot A$$

para o membro parcialmente molhado

$$f_b = (\rho_w - \rho) \cdot g \cdot A \text{ - para o membro totalmente submerso.}$$

onde  $\rho$  - massa específica do elemento

$g$  - constante gravitacional (default,  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

$A$  - ¢rea ( $A = \pi d^2/4$ )

$\rho_w$  - massa específica do fluido

$\ell_m$  - comprimento molhado do elemento

$\ell$  - comprimento total do elemento.

O elemento é considerado sempre como tendo uma seção não vazada (cheia). A identificação se o elemento é total ou parcialmente molhado, ou se é seco, é feita na fase inicial dos cálculos dentro do módulo de ondas, visto que esse cálculo também é necessário para a consideração de cargas de ondas e correntes sobre o elemento. O cálculo do ponto de interseção fluido-elemento é feito considerando-se o elemento como uma reta. Esta aproximação é importante apenas para a situação em que o membro é parcialmente molhado e pode ser melhorada também por uma maior discretização na região próxima à superfície.

#### - Carga Mínima Distribuída sobre os Cabos

Devido à própria formulação do elemento catenária, apresentada no Capítulo II, uma carga uniformemente distribuída é suposta sempre como atuando ao longo de cada elemento de cabo.

Em análises dinâmicas, pode ocorrer de a carga calculada automaticamente resultar praticamente nula. Esta carga poderá levar a problemas numéricos no processo iterativo de cálculo de forças nas extremidades dos cabos.

Para prevenir este tipo de situação, é que se prescreve uma carga mínima atuando sobre os cabos. Esta carga é assumida atuando em qualquer elemento de cabo sempre que a carga calculada foi menor que ela.

O valor adotado para esta carga deve ser sufici-

entamente grande para não causar problemas numéricos e suficientemente pequeno para não interferir no problema. Costuma-se especificar esta carga como sendo 1/100 do peso próprio do cabo, mas outros valores poderão ser especificados com sucesso, dependendo da sensibilidade do analista diante do problema.

Tem-se então  $f_a$  a carga assumida especificada e  $\underline{c}_a$  vetor de cossenos diretores da direção da atuação também especificado.

Testa-se então o vetor  $\underline{w}$  que inclui efeitos de ondas, correntes, peso próprio e empuxo.

$$\underline{w} = \begin{Bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{Bmatrix} ; wM = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} \quad (4.20)$$

$$\text{Se } wM < f_a \Rightarrow \underline{w} = f_a \cdot \underline{c}_a$$

#### 4.3.2 - Cargas em Elementos de Pórtico

A fórmula de Morison é aplicada de forma semelhante ao que foi feito para cabos, só que aqui não se considera o coeficiente de arraste tangencial ao elemento.

$$\begin{Bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{Bmatrix} = C_M \rho_w \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \begin{Bmatrix} a_{nx} \\ a_{ny} \\ a_{nz} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} C_D \rho_w d v_N \begin{Bmatrix} v_{nx} \\ v_{ny} \\ v_{nz} \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

A descrição dos parâmetros é idêntica à que foi feita para os cabos na seção anterior, sendo que o coeficiente de arraste normal é denominado  $C_D$ . Este coeficiente quando não especificado juntamente com as propriedades dos materiais

será calculado automaticamente também de acordo com o número de Reynolds [13]:

$$R_e \leq 2.0 \times 10^5 \Rightarrow C_D = 1.2$$

$$2.0 \times 10^5 < R_e < 5.0 \times 10^5 \Rightarrow C_D = 0.7$$

$$R_e \geq 5.0 \times 10^5 \Rightarrow C_D = 23/15 - R_e / (6.0 \times 10^5)$$

A aceleração e a velocidade normais são obtidas através de operações vetoriais, conforme indicado para cabos, só que esses valores não são calculados apenas nos nós, mas também num ponto médio.

No caso das acelerações e velocidades do membro, seus valores são conhecidos apenas nos nós e são obtidos valores para o ponto médio através de interpolação linear. Para o caso do membro totalmente submerso pode-se visualizar na figura (4.6).

No caso do membro parcialmente molhado é empregada a interpolação linear para cálculo dos valores nos pontos de contato e médio, conforme indicado na figura (4.7).

- Caso do membro totalmente molhado:

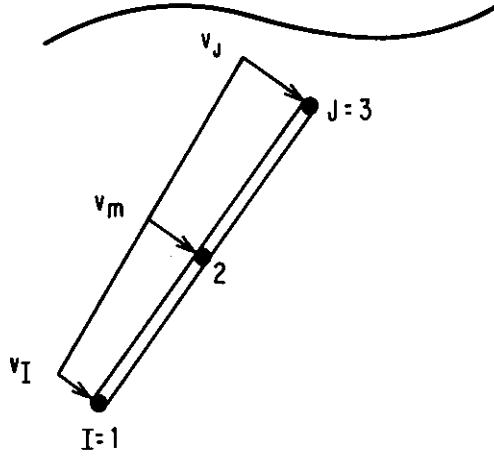


Figura 4.6

onde:  $v_m$  - valor da velocidade do membro no ponto médio.

$$v_m = \frac{v_I + v_J}{2}$$

- Caso do membro parcialmente molhado:

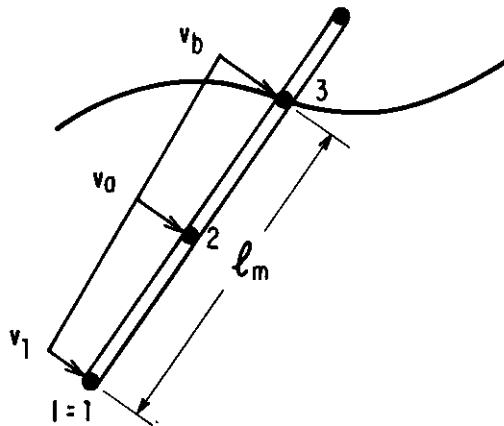


Figura 4.7

onde:  $v_1$  - velocidade do membro no nã molhado.

$v_b$  - velocidade do membro no ponto de contato onda-elemento.

$v_a$  - velocidade do membro no ponto médio.

As velocidades e acelerações do fluido são obtidas utilizando-se as coordenadas dos pontos 1, 2 e 3 indicadas nas figuras anteriores, que são calculadas previamente quando do cálculo do ponto de contato fluido-elemento.

Dessa forma, é feita a aplicação da fórmula de Morison para 3 pontos do elemento. A carga distribuída é então considerada como tendo uma distribuição parabólica passando pelos pontos.

É ajustada uma parábola  $p(x)$  ligando os 3 pontos, como indicado na figura (4.8), nos dando:

$$p(x) = ax^2 + bx + c \quad (4.22)$$

onde:

$$a = \frac{2(F_3 - 2F_2 + F_1)}{\ell_m^2} \quad (4.23)$$

$$b = \frac{2(F_2 - F_1)}{\ell_m} - \frac{\ell_m}{2} \cdot a \quad (4.24)$$

$$c = F_1 \quad (4.25)$$

$\ell_m$  = comprimento molhado do membro.

$\ell$  = comprimento total do membro.

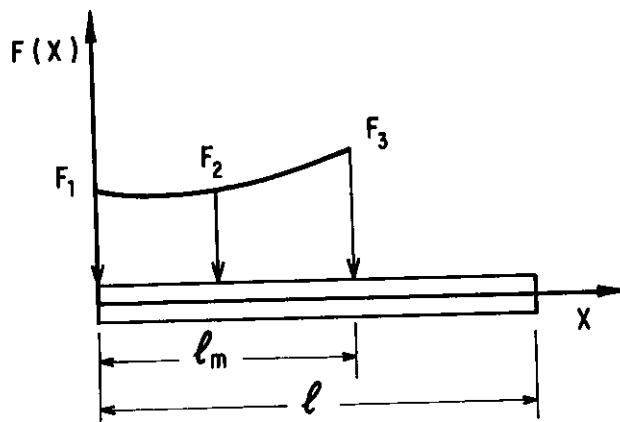


Figura 4.8

As forças nas extremidades são calculadas utilizando-se fórmulas, funções do comprimento molhado, das forças e do comprimento total do membro.

A dedução das fórmulas é feita utilizando-se:

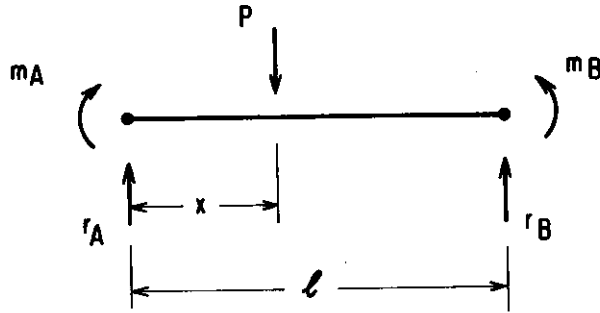


Figura 4.9

$$\text{onde: } m_A = \frac{P \cdot x (\ell - x)^2}{\ell^2} \quad (4.26)$$

$$m_B = \frac{P x^2 (\ell - x)^2}{\ell^2} \quad (4.27)$$

$$r_A = \frac{P (\ell - x)^2}{\ell^3} (2x + \ell) \quad (4.28)$$

$$r_B = \frac{P x^2}{\ell^3} (3\ell - 2x) \quad (4.29)$$

E integrando-se ao longo do comprimento:

$$M_a = \int_0^\ell p(x) \cdot m_A \cdot dx \quad (4.30)$$

$$M_b = \int_0^\ell p(x) \cdot m_B \cdot dx \quad (4.31)$$

$$R_a = \int_0^\ell p(x) \cdot r_A \cdot dx \quad (4.32)$$

$$R_b = \int_0^\ell p(x) \cdot r_B \cdot dx \quad (4.33)$$

### - Cargas de Peso Próprio e Empuxo

Conforme é feito para os cabos, ao vetor de forças nodais equivalentes à ação de ondas e correntes será adicionado um vetor de forças nodais equivalentes à ação do peso próprio e empuxo.

A força distribuída é considerada atuando ao longo da direção Z, e para efeito de cálculo das forças nas extremidades a força é decomposta em suas componentes nas direções normal e tangencial.

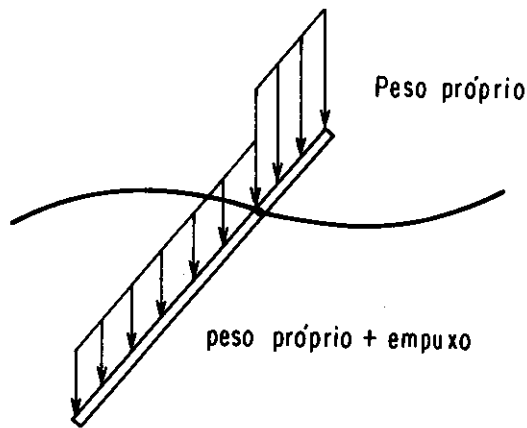


Figura 4.10

Que pode ser decomposta em:

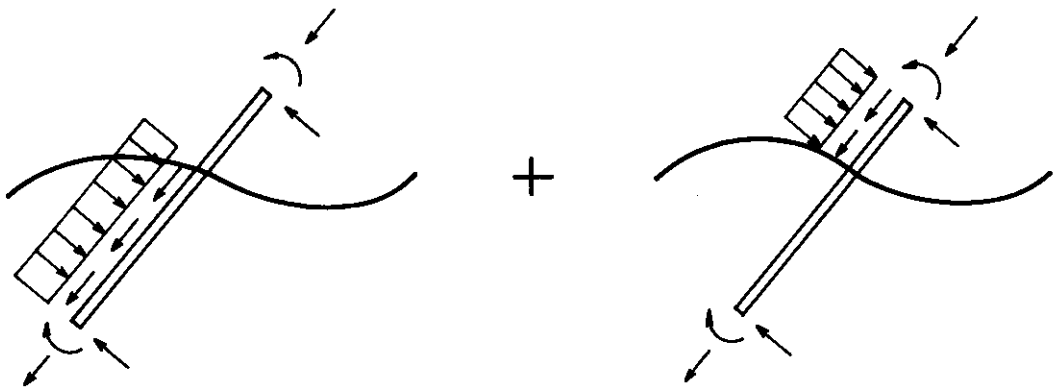


Figura 4.11



As cargas nas extremidades são calculadas como casos particulares dentro do formulário usado para as cargas de ondas e correntes.

#### 4.4 - Massa Adicionada

A força de inércia proporcional à aceleração das partículas representada pelo primeiro termo da equação (4.8), na verdade depende da aceleração relativa fluido-estrutura de forma análoga ao que ocorre com os termos de arraste desta equação.

Como o termo é linear na aceleração, é possível separar a parte da aceleração das partículas fluidas da parte da aceleração estrutural. A parte devida à aceleração estrutural é considerada como uma massa adicionada à matriz de massa da estrutura.

Uma característica importante da massa adicionada é a de não possuir termos na direção tangencial aos cabos e barras. A figura (4.12), mostra um membro cilíndrico e as componentes normal e tangencial de uma aceleração unitária na direção x.

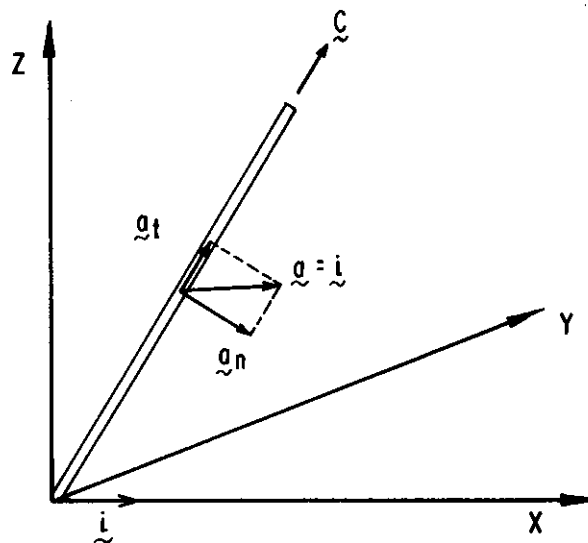


Fig. 4.12

O vetor aceleração normal ao cilindro e que está contido no plano formado pelo eixo  $x$  e o eixo do cilindro é dado por [13,21]:

$$\underline{a}_n = \underline{C} \times |\underline{i} \times \underline{C}| \quad (4.34)$$

$$\underline{a}_n = (1 - C_x^2) \underline{i} + (-Cx Cy) \underline{j} + (-Cx Cz) \underline{k} \quad (4.35)$$

$$|\underline{a}_n| = \sqrt{1 - Cx^2} \quad (4.36)$$

Estendendo o raciocínio aplicado para a direção  $x$ , para considerar acelerações unitárias nas outras direções globais  $y$  e  $z$ , obtêm-se então a matriz de massa adicionada.

$$M_w = \frac{(C_M - 1) \rho_w A \ell}{2} \begin{bmatrix} (1 - Cx^2) & -Cx Cy & -Cx Cz \\ & (1 - Cy^2) & -Cy Cz \\ & & (1 - Cz^2) \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

A matriz de massa adicionada para um membro na forma apresentada possui termos fora da diagonal, o que não está de acordo com a consideração da matriz de massa discreta. Torna-se necessário então a diagonalização da matriz.

#### 4.5 - Corpos Rígidos Esféricos

Em muitas ocasiões pode ser importante a inclusão, na análise, de forças atuantes em corpos rígidos existentes na estrutura.

Estas forças devem incluir a força do fluido sobre o corpo, as forças de massa e as forças de peso próprio e empuxo.

Elementos como bóias, âncoras e outros componen-

tes discretos aparecem com frequência em estruturas com cabos na engenharia offshore, e podem ser modelados como corpos rígidos. A dificuldade surge em relação à forma dos corpos, pois não existem fórmulas para corpos de formas arbitrárias.

Para formas de esfera e cilindro existem fórmulas e coeficientes disponíveis na literatura. Muito frequentemente os corpos rígidos podem ser modelados por uma esfera ou cilindro equivalente [18].

Neste trabalho foi implementada a facilidade de se especificar corpos rígidos esféricos ligados a quaisquer nós da estrutura. Para estes corpos são calculadas as forças de fluido utilizando-se a fórmula de Morison, e de peso próprio e empuxo. Na análise dinâmica a massa do corpo é automaticamente incorporada como um vetor de massa no nó correspondente.

A fórmula de Morison aplicada a corpos rígidos esféricos é utilizada:

$$D_F = \frac{1}{2} \rho_w C_D A v_c^2 \quad (4.38)$$

sendo  $\rho_w$  - massa específica do fluido

$C_D$  - coeficiente de arraste da bôia

$A$  - área da esfera projetada no plano vertical:

$$A = \pi R_s^2$$

$D_F$  - carga concentrada aplicada no centro da esfera

$R_s$  - raio da esfera

$v_c$  - velocidade do fluido

Os coeficientes de arraste nos corpos rígidos es

fêricos, podem ser calculados automaticamente como função do Número de Reynolds, de acordo com Berteaux [35].

$$C_D = C_D (R_e)$$

$$R_e = \frac{2v_c R_s}{\mu} ; \mu - \text{viscosidade cinemática do fluido.}$$

$$(3,0 \times 10^4) \leq R_e < (2,0 \times 10^5) \Rightarrow C_D = 0.5$$

$$(2,0 \times 10^5) \leq R_e < (2,5 \times 10^5)$$

$$\Rightarrow C_D = 0.5 e^{\left[ \frac{R_e - (2,0 \times 10^5)}{4,9 \times 10^4} \right]}$$

$$(2,5 \times 10^5) \leq R_e < (4,0 \times 10^5)$$

$$\Rightarrow C_D = 0.18 e^{\left[ \frac{R_e - (2,5 \times 10^5)}{(1,4 \times 10^6)} \right]}$$

$$(4,0 \times 10^5) \leq R_e < (1,0 \times 10^7) \Rightarrow C_D = 0.2$$

## CAPÍTULO V

ANÁLISE DE RESULTADOS

Neste capítulo alguns exemplos são apresentados com o objetivo de aferir e demonstrar a capacidade do programa na análise de problemas reais.

Foram analisados tres casos de análise estática e dois casos de análise dinâmica.

O primeiro exemplo estático é um caso simples , analisado com o objetivo de aferir o programa diante de resultados obtidos por Peyrot, além de demonstrar a capacidade de se levar em conta o efeito da temperatura. Os outros dois exemplos estáticos se constituem de casos reais em que se verificam a ocorrência de grandes deslocamentos, e nos quais são utilizadas as facilidades acrescentadas ao programa para análise de casos práticos.

Na análise dinâmica, o primeiro exemplo se constitui num problema acadêmico que foi analisado com o objetivo de se aferirem os módulos de análises modal e direto e para permitir a comparação com outros tipos de elementos de cabos, cujos resultados se encontram disponíveis na literatura.

O segundo exemplo dinâmico é um caso real que procura demonstrar a capacidade do programa para análises de linhas de amarração de plataformas, considerando-se um movimento prescrito na extremidade superior, e os vários efeitos não-lineares relacionados a este tipo de problema.

## 5.1 - Sistema de Cabos Suportado por uma Mola

A estrutura possui 3 graus de liberdade e é formada por 3 cabos suportados por uma mola vertical K, cujo apoio pode se deslocar no plano horizontal. Este exemplo, apresentado por Peyrot<sup>7</sup>, foi analisado com o objetivo de comparar resultados.

Nas figuras (5.1) e (5.2) são apresentadas as vistas de lado e de topo da estrutura. Em linha tracejada está a configuração inicial adotada e em linha cheia a configuração deformada. As cargas atuantes foram o peso próprio dos cabos, na direção z, e uma carga concentrada no ponto A e na direção y, que está indicada na figura (5.2). Foi levada em conta também uma variação de temperatura nos cabos.

Os resultados obtidos são praticamente iguais àqueles apresentados na referência [7], sendo a diferença máxima encontrada nos deslocamentos de 0,04%. Esta diferença é ainda menor se calculada para as tensões.

O quadro (5.1), é de todo idêntico ao apresentado por Peyrot. Nele são fornecidos os dados geométricos e físicos da estrutura, bem como os resultados encontrados para os deslocamentos e para as forças nas extremidades. Os números apresentados estão em unidades coerentes.

RIGIDEZ VERTICAL DO APOIO ELÁSTICO $K = 1000$								
DADOS COMUNS AOS 3 CABOS								
$EA = 290000$			$T = 100$			$ET = 0.0000065$		
DESLOCAMENTOS DO NÓ A EM RELAÇÃO À POSIÇÃO INICIAL								
$X_x = 26.471$			$X_y = 41.150$			$X_z = -2.873$		
DADOS INDIVIDUAIS DOS CABOS E FORÇAS NODAIS NO SISTEMA GLOBAL								
CABO Nº	w	$L_u$	FORÇAS NA EXT. I			FORÇAS NA EXT. J		
			x	y	z	x	y	z
1	1.	580.	1685.8	162.7	1867.8	-1685.8	-162.7	-1288.2
2	2.	510.	-437.3	-303.0	505.5	437.3	303.0	513.8
3	2.	510.	-1248.6	1140.4	499.8	1248.6	-1140.4	519.5

Quadro 5.1  
Dados Gerais e Resultados

Sendo:

$T$  - variação da temperatura

$ET$  - coeficiente de dilatação térmica

A consideração da variação da temperatura é feita internamente pelo subprograma de cálculo das forças nas extremidades nos cabos, alterando-se o valor do comprimento inicial dos elementos de acordo com:

$$L_{ul} = L_u (1.0 + T \times ET)$$

onde:

$L_u$  - comprimento inicial fornecido

$L_{ul}$  - comprimento inicial calculado que inclui o efeito de temperatura.

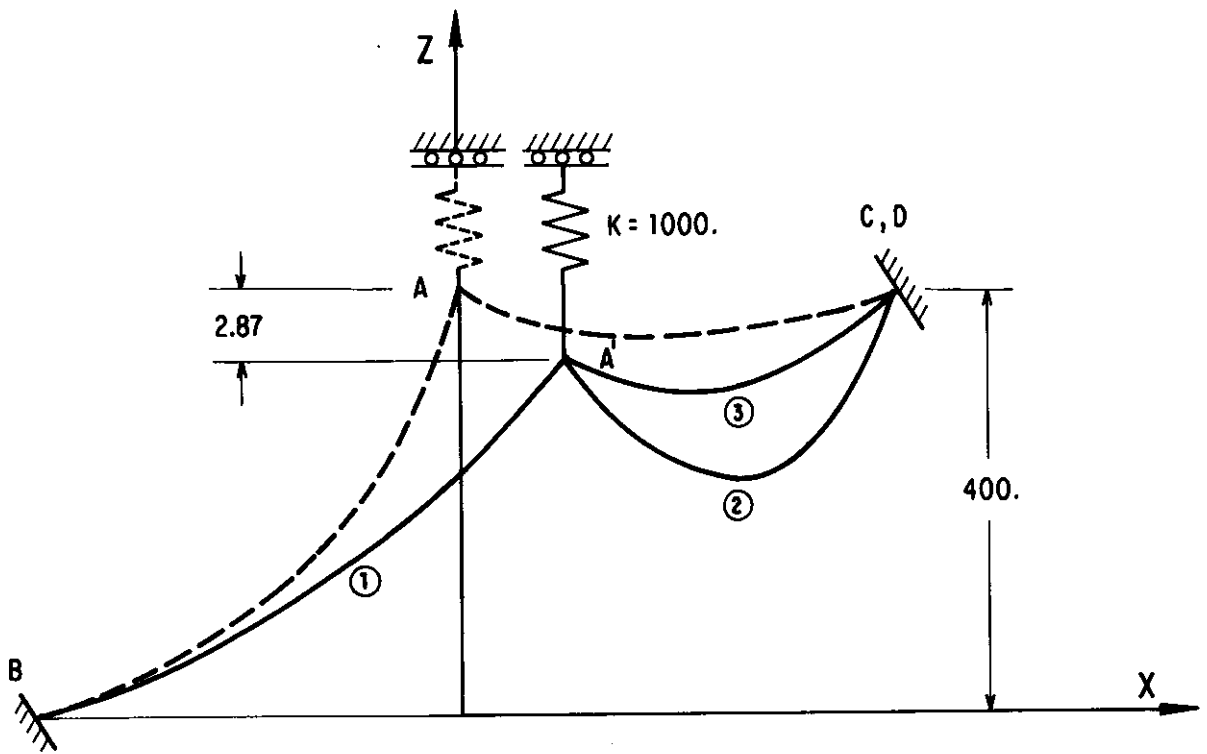


Figura 5.1

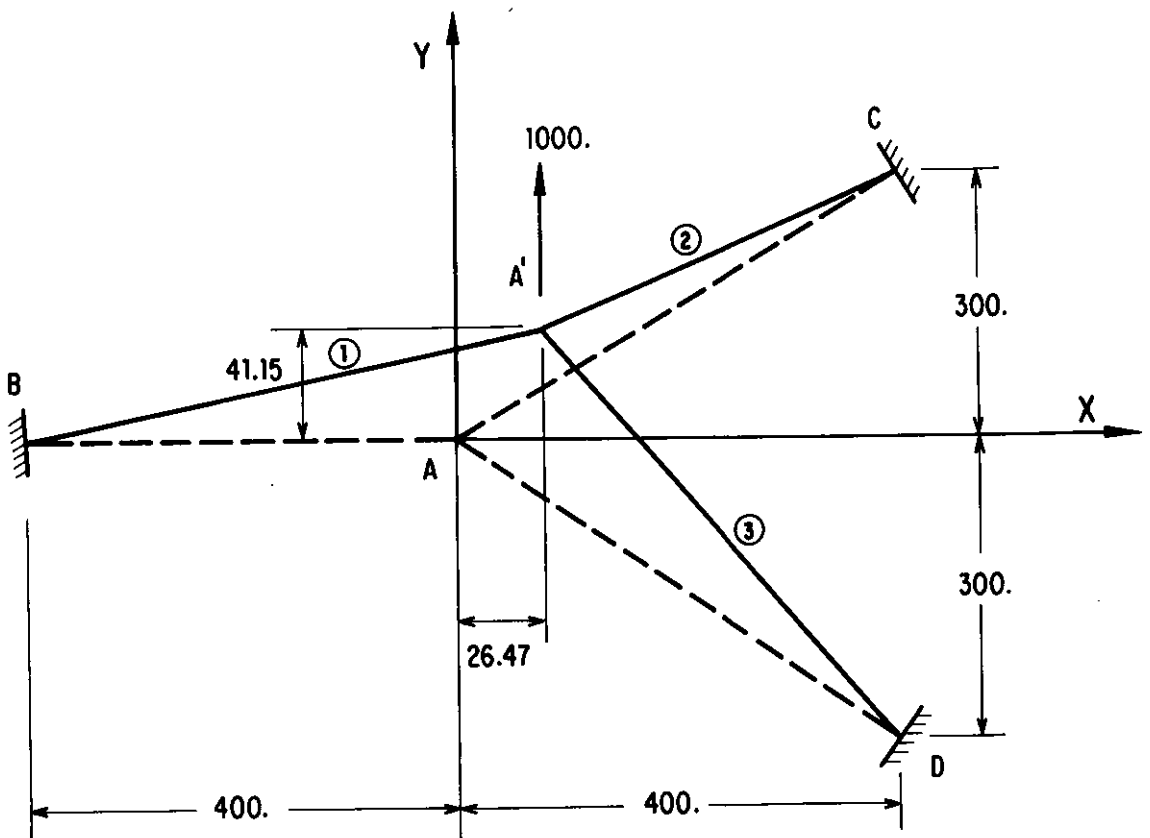


Figura 5.2



## 5.2 - Estrutura Experimental SEACON II

A estrutura SEACON II é uma plataforma triangular suspensa por 3 bóias e ancorada ao fundo por 3 cabos espaçados de  $120^{\circ}$ , como descrita por Kretschmer<sup>19</sup>. Foi construída em caráter experimental numa base naval americana com o objetivo de testar técnicas de projeto e instalação de estruturas de cabos.

A lâmina d'água é de 2860 pés e a estrutura encontra-se totalmente submersa. Na figura (5.3) pode-se observar a estrutura em perspectiva. As projeções nos planos horizontal e vertical são dadas nas figuras (5.4) e (5.5), sendo as dimensões dadas em pés.

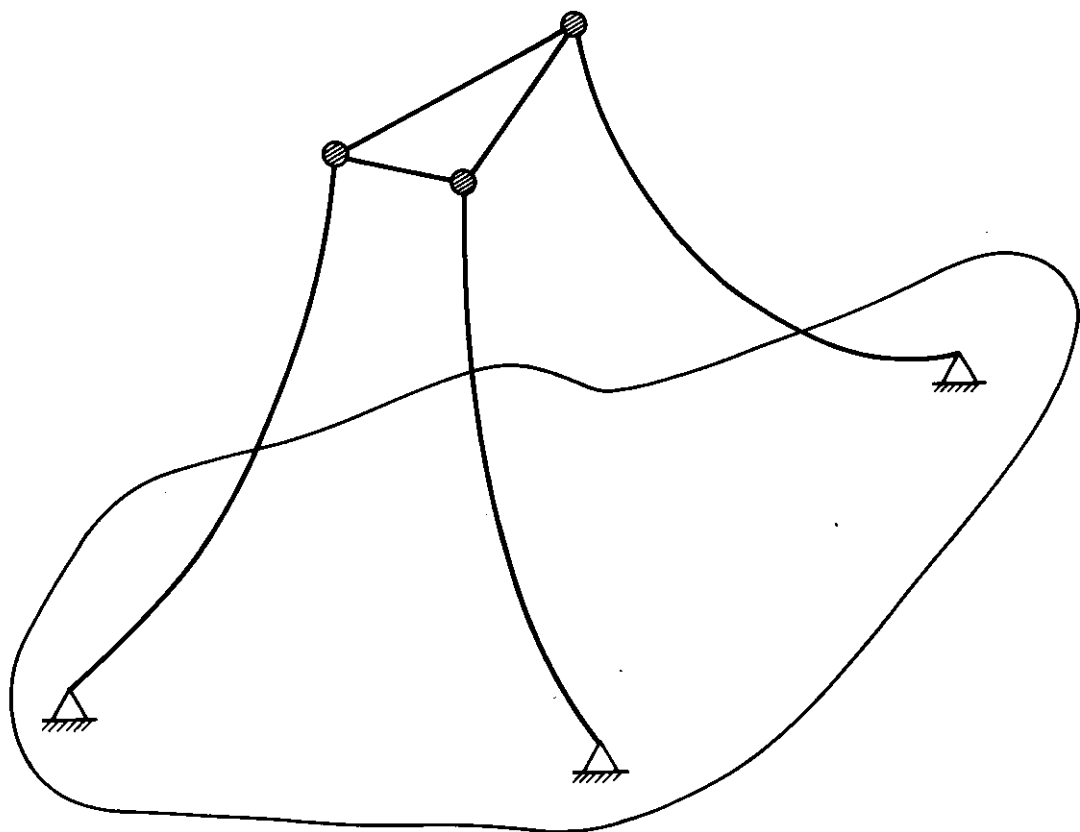


Figura 5.3  
Perspectiva

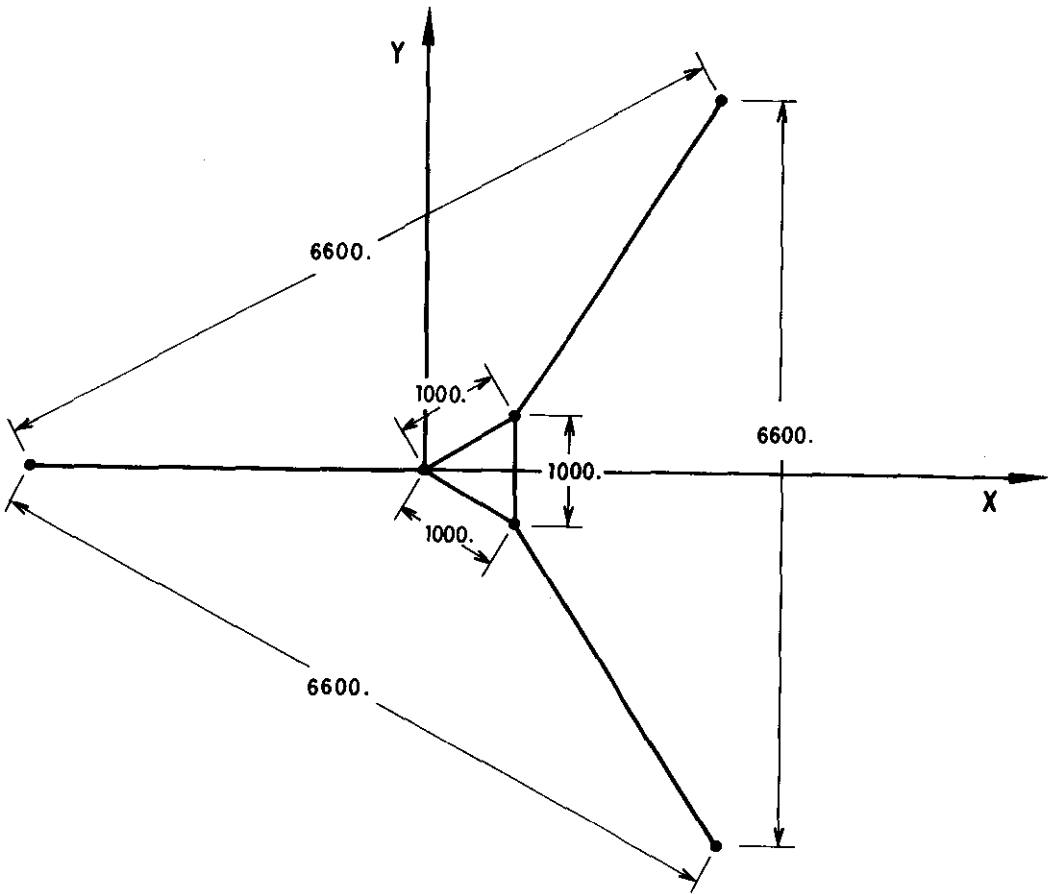


Figura 5.4  
Projecção Horizontal

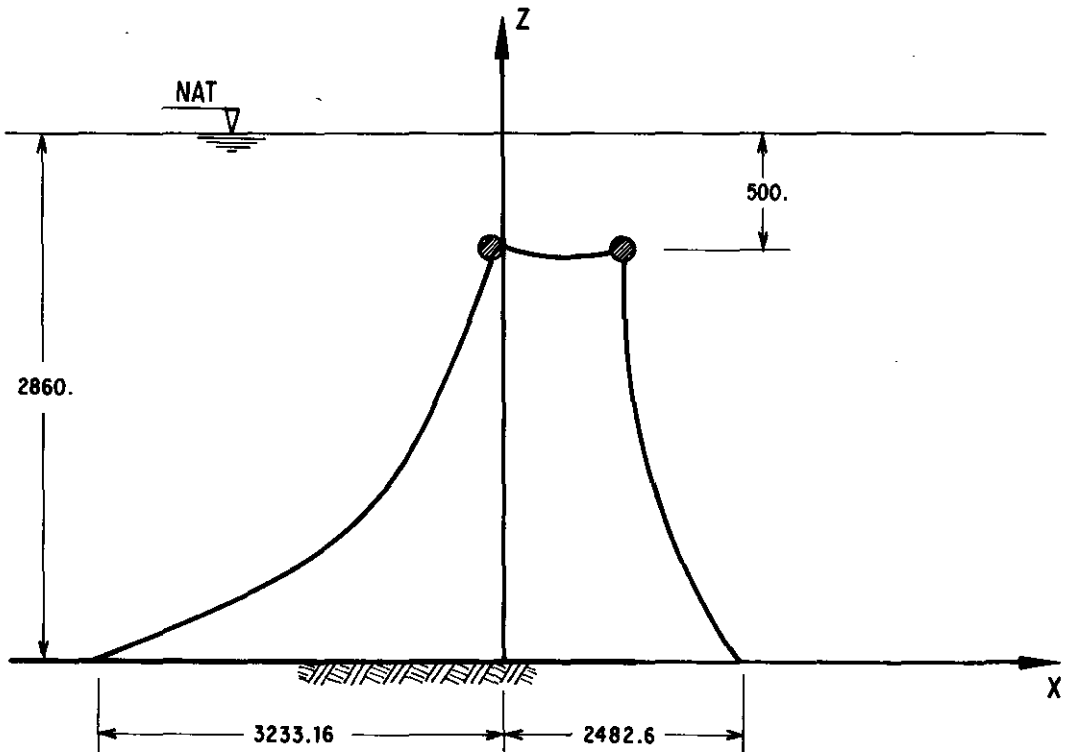


Figura 5.5  
Projecção Vertical

Os dados da estrutura podem ser resumidos da seguinte forma:

Lâmina d'água .....	2900 pés
Profundidade das bóias .....	500 pés
Diâmetro das bóias .....	5,5833 pés
Distância entre âncoras .....	6600 pés
Comprimento dos Cabos (Pernas) .....	4080 pés
Comprimento dos Cabos (Braços) .....	1000 pés
Diâmetro dos Cabos .....	0,061 pés
Módulo de Elasticidade .....	$6,15 \times 10^6$ lb/pé <sup>2</sup>
Peso submerso dos cabos .....	0,31 lbs/pé
Força nas bóias .....	1745 lbs
Coeficiente de arraste normal (cabos)	1,2
Coeficiente de arraste (bóias) .....	0,5

Foram realizadas análises estáticas e de vibrações livres. A resposta estática da estrutura é obtida considerando-se somente o peso próprio e acrescentando-se a ele uma corrente de perfil bi-linear.

#### - Análise sob Peso Próprio

Nesta análise cada cabo é discretizado por apenas um elemento já que a carga é uniforme para todos. A profundidade das bóias foi tomada igual a 500 ft [19].

O resultado corresponde a um deslocamento das bóias de aproximadamente 50 ft, na direção vertical. Foram calculados pelo programa pontos sobre a catenária para os elementos em sua posição deformada. Estes pontos foram utilizados para uma maior discretização da estrutura visando o cálculo

lo do seu comportamento frente a um perfil de corrente variável.

Na figura (5.6 ) são indicadas as posições inicial e final e os pontos da geometria calculados.

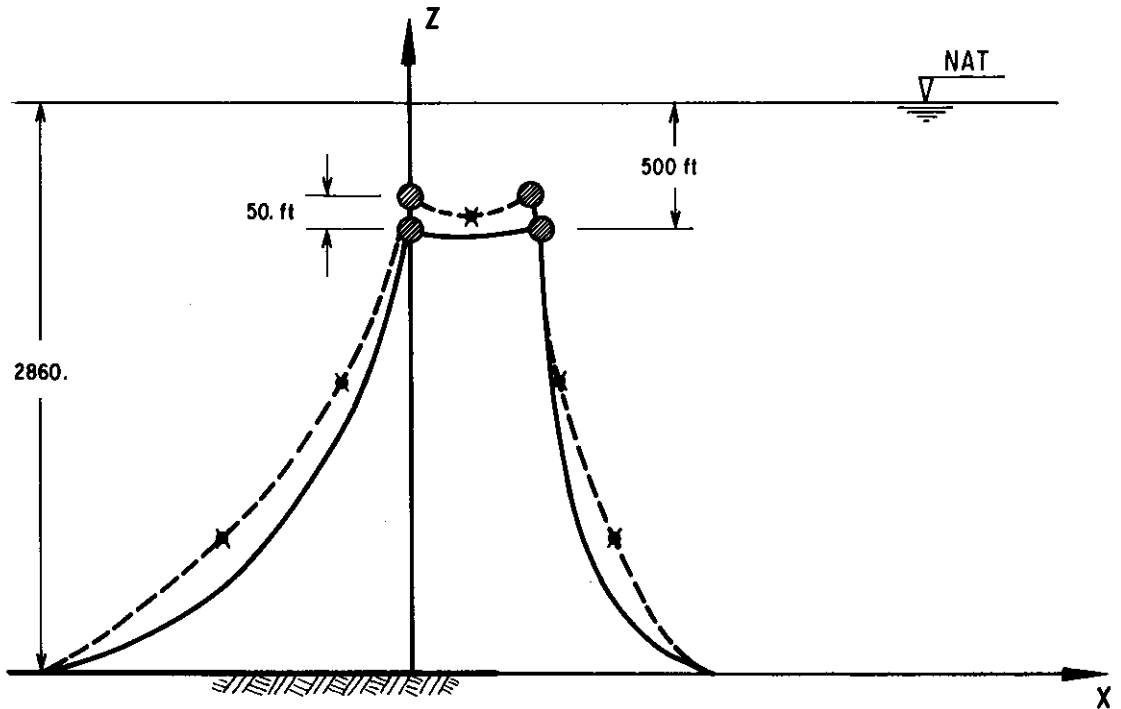


Figura 5.6

- Posição inicial
- Deformada sob ação do peso próprio
- x Pontos da geometria calculados automaticamente.

### - Análise sob Ação de Corrente

É feita a partir da posição de equilíbrio sob peso próprio e utilizando-se uma discretização, conforme indicado na figura (5.7).

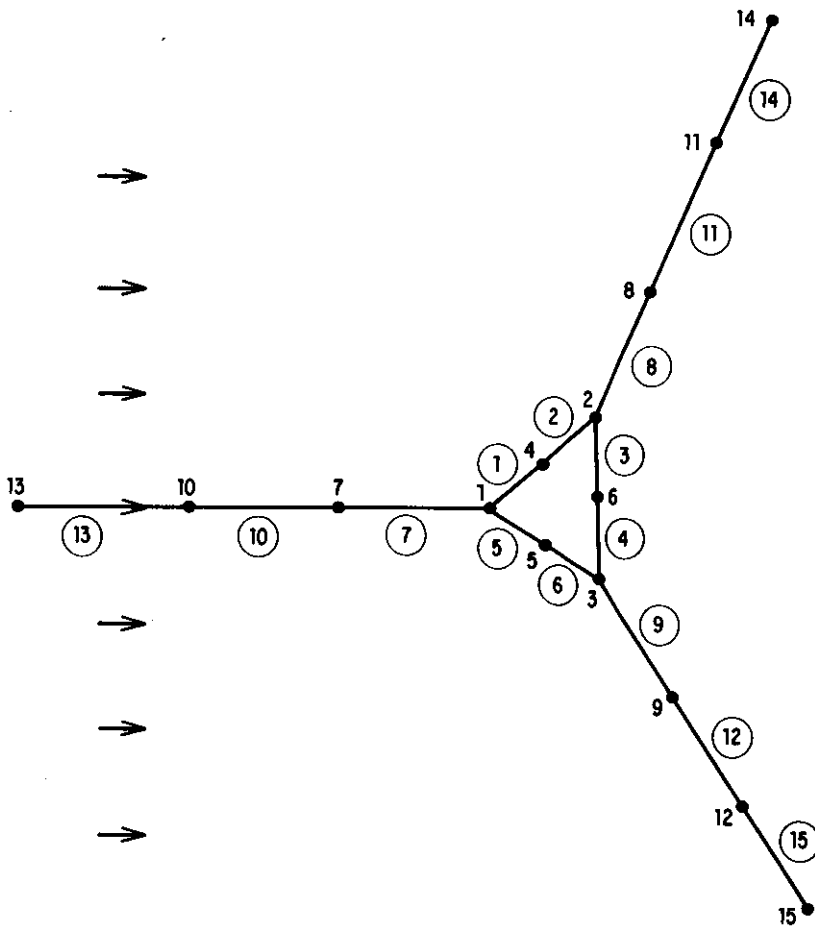


Figura 5.7  
Malha de Elementos Finitos

Utilizando um perfil de corrente bi-linear, figura (5.10), Kretschmer<sup>19</sup> realizou a análise através do programa DESADE, que se baseia no Método das Reações Imaginárias.

Webster<sup>18</sup>, fez uma análise semelhante com o programa SEADYN pelo método dos elementos finitos, utilizando um elemento reto. Para encontrar a configuração de equilíbrio sob peso próprio, Webster teve problemas de convergência com o Método de Newton-Raphson. A mesma análise foi feita com o elemento catenária, tendo realizado 5 iterações para atingir a convergência.

Vale acrescentar, que a análise da estrutura sob ação do efeito combinado do peso próprio e da corrente, utilizando o elemento catenária, pode ser feita tomando-se a mesma posição inicial e a mesma malha utilizada na análise sob peso próprio. Webster<sup>18</sup>, realizou a análise em 2 estágios, devido a problemas de convergência do seu elemento.

Foi feita uma análise, aplicando-se a corrente e o peso próprio, à configuração inicial. A convergência foi alcançada em 5 iterações e os valores obtidos diferem muito pouco daqueles obtidos com malha mais refinada, como indicado no quadro ( 5.2 ).

Isto serve para demonstrar que no caso desta análise, não é necessário que se faça uma pré-análise sob ação do peso próprio, seja por problemas de convergência ou com o objetivo de calcular pontos para refinar a malha.

No quadro ( 5.2 ), é feita uma comparação entre os resultados obtidos nos programas DESADE, SEADYN e com o elemento catenária para a malha refinada da figura ( 5.7 ) (malha 1) e para a malha grosseira (malha 2). Na figura (5.10) se identificam os nós 1 e 2 referidos na tabela.

DESLOCAMENTOS (pés)		DESADE	SEADYN	ELEMENTO CATENÁRIA	
				Malha 1	Malha 2
No 1	x	70,0	57,5	52,6	52,5
	z	-52,0	-51,0	-48,0	-48,1
No 2	y	-	- 2,7	- 2,52	- 3,20
	z	+21,0	+20,4	+22,6	+23,63

Quadro 5.2

Como se pode observar, os resultados obtidos com o elemento catenária apresentam uma aproximação bastante razoável em relação aos obtidos com uma malha de 30 elementos retos do programa SEADYN.

Foram feitas, também, análises considerando ângulos de ataque de  $30^\circ$  e  $180^\circ$  em relação ao eixo x, para a corrente. Estas análises demonstram o caráter tridimensional da análise.

Nas figuras (5.11) e (5.12) são mostradas as configurações deformadas no plano horizontal, obtidas nestas 2 análises.

Uma estrutura semelhante a esta, porém mais rígida, foi analisada por Fellipa<sup>12</sup>, utilizando um elemento quadrático.

Este tipo de estrutura aparece com uma certa frequência na literatura como teste da capacidade de convergência de elementos de cabo diante de grandes deslocamentos e de análises de caráter tridimensional.

Na análise de vibrações livres da estrutura, foi encontrado um período de aproximadamente 100 segundos. Os quatro primeiros modos normais de vibração da estrutura são apresentados nas figuras (5.8) e (5.9).

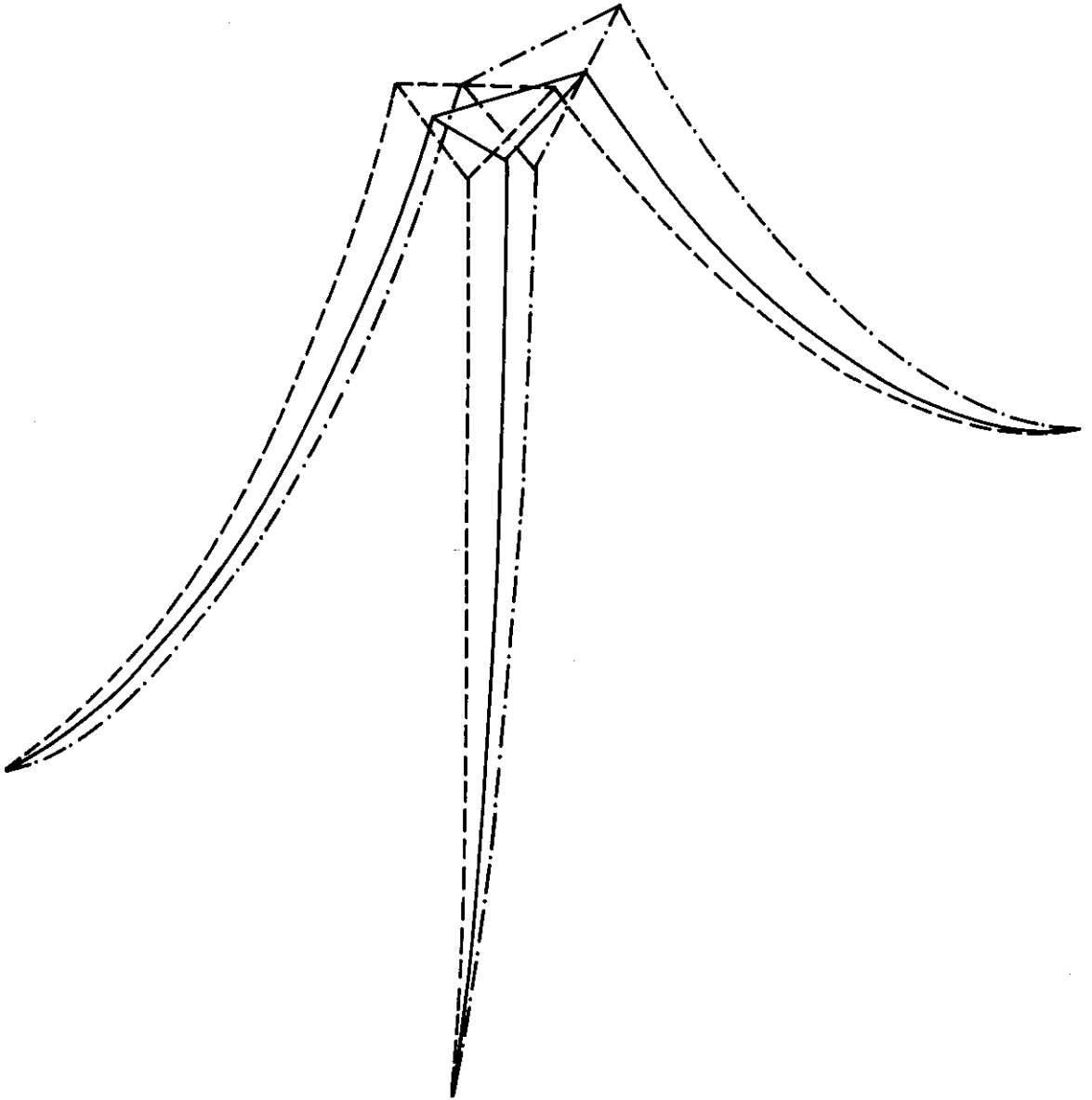


Figura 5.8

1º modo ( $T = 110$  segs.)

2º modo ( $T = 110$  segs.)



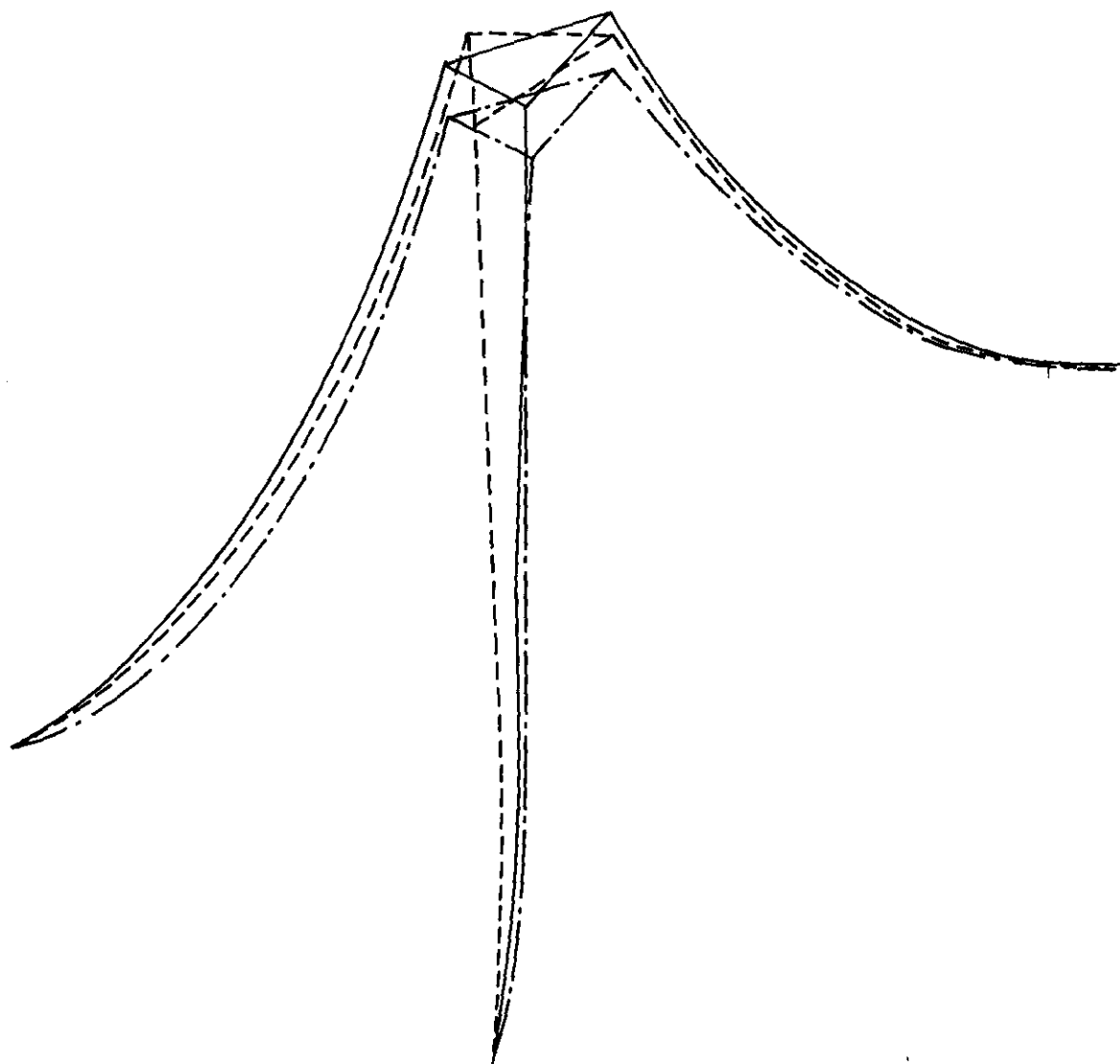
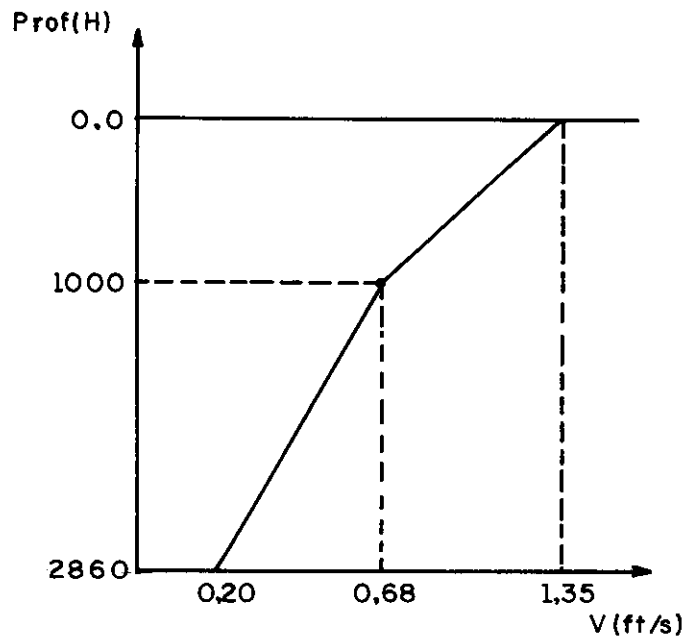
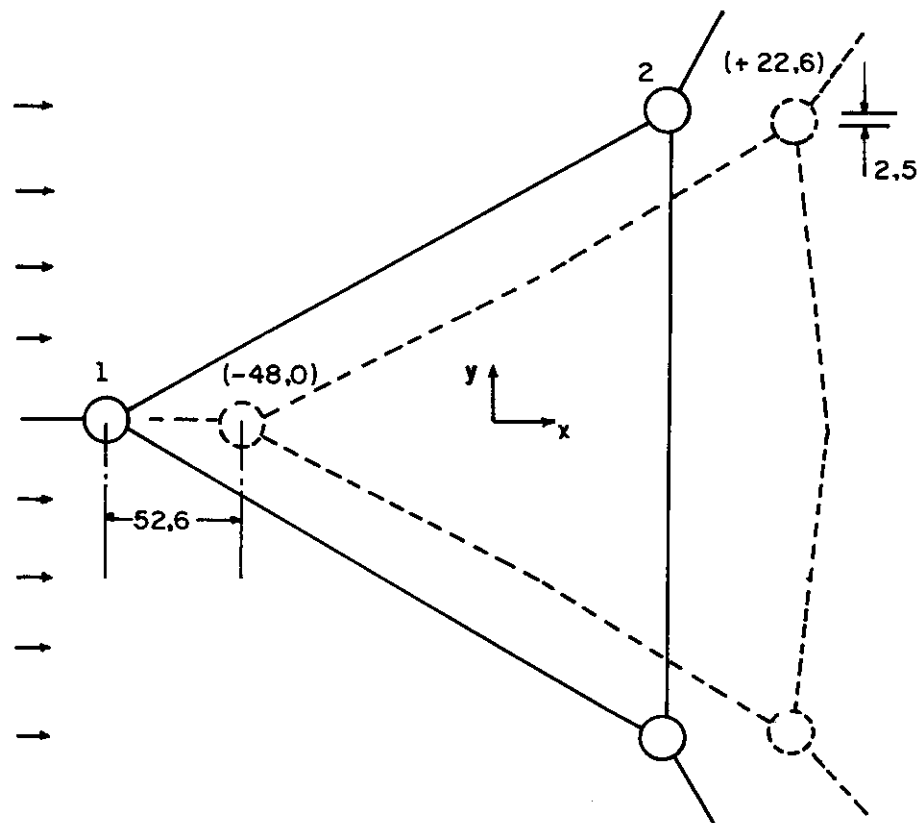


Figura 5.9  
3º modo ( $T = 90.5$  secs.)  
4º modo ( $T = 79.7$  secs.)



PERFIL DE CORRENTE BI-LINEAR  
 PROFUNDIDADE x VALOR DA CORRENTE



DESLOCAMENTO DO DELTA RELATIVOS À POSIÇÃO DE  
 EQUILÍBRIO SOB PESO PRÓPRIO  
 CORRENTE 0°-PLANO X-Y  
 (X X) DESLOCAMENTO VERTICAL

FIGURA 5.10

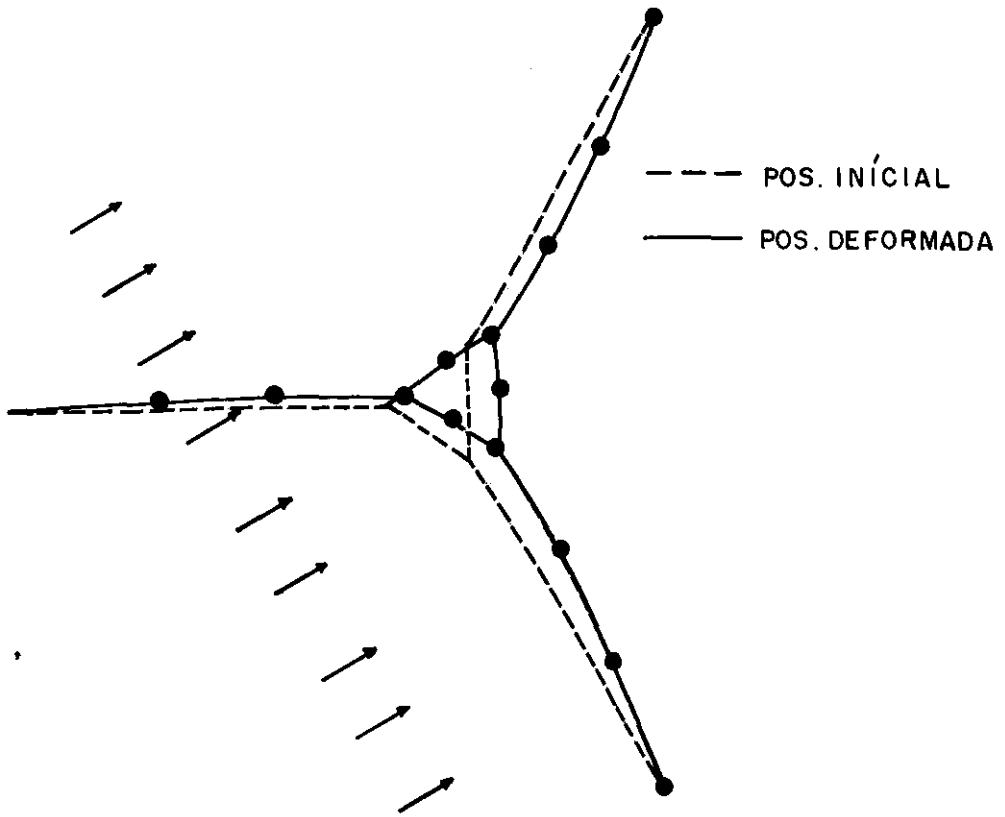


FIGURA 5.11  
PLANO X-Y CORRENTE 30°

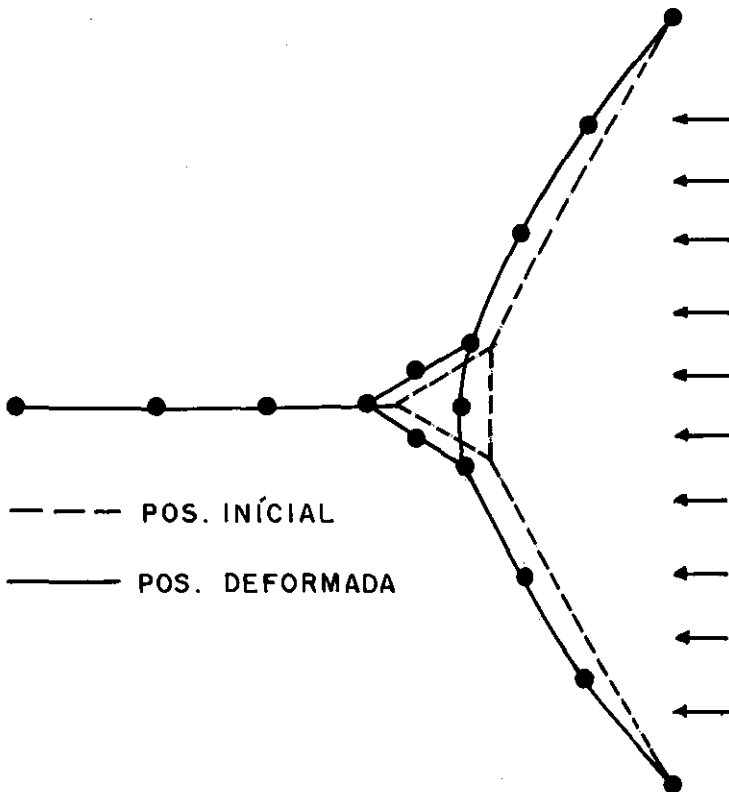


FIGURA 5.12  
PLANO X-Y CORRENTE 180°

### 5.3. - Análises de um Mangote Flexível

Grande parte dos recursos do sistema elaborado foram utilizados nesta análise de um mangote flexível utilizado para condução de óleo do fundo mar a uma plataforma semi-submersível numa lâmina d'água de 243 m.

O objetivo da análise é calcular as reações impostas pelos mangotes à estrutura de suporte de conectores da plataforma, considerando a ação de ondas, corrente, peso próprio e empuxo.

A simulação do fundo do mar é feita através de molas não-lineares. Levou-se em conta também um peso adicional sobre o mangote na região mais próxima ao fundo, devido a um reforço de aço inoxidável colocado para evitar o desgaste do mesmo.

As características do mangote são resumidas no quadro (5.4).

A posição de instalação do mangote é dada na figura (5.13). Seu comprimento total é de 419 m, sendo 164 m sem reforço. O comprimento total de 277 m até o ponto de contato com o fundo, bem como a projeção horizontal até este ponto foram fornecidos pelo instalador. De posse dos dados geométricos indicados, pode-se calcular o comprimento inicial do cabo, para levar em conta a deformação.

#### - Cálculo do Comprimento Inicial

Como indicado na figura (5.13), o cabo possui 3 regiões de pesos diferentes até o seu ponto de toque no fundo. Para o cálculo do comprimento inicial, considerou-se um peso uniforme para todo o cabo, calculado ponderando-se os pesos pe-

los comprimentos.

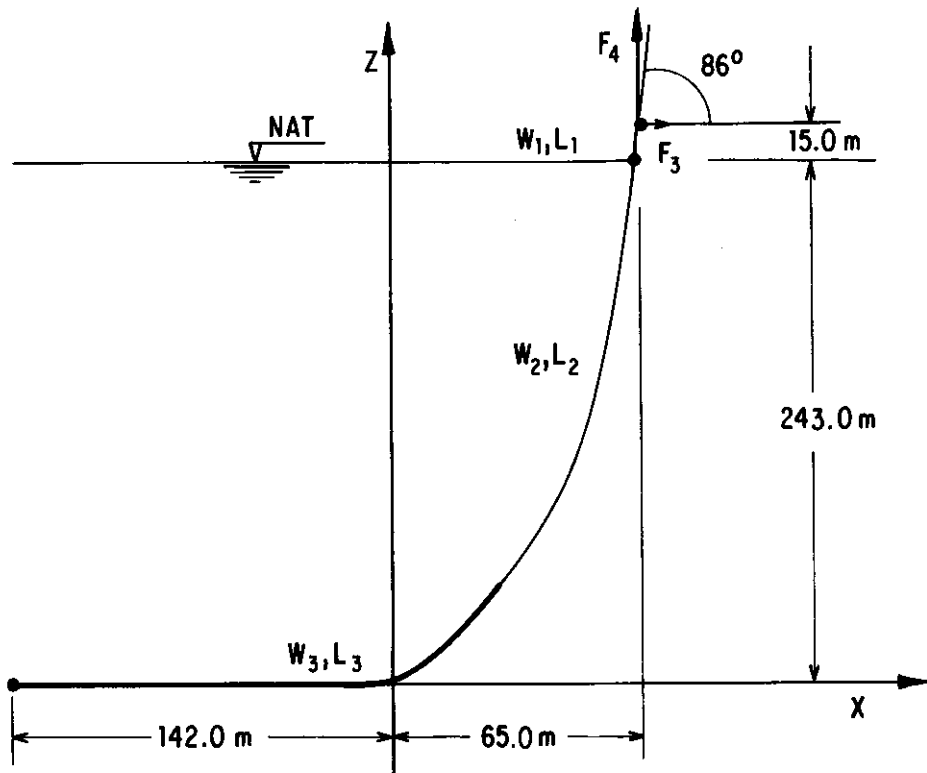


Figura 5.13

O peso equivalente:

$$w = \frac{w_1 L_1 + w_2 L_2 + w_3 L_3}{L}$$

sendo:

$w_1$  = peso do cabo no ar e cheio

$w_2$  = peso do cabo submerso e cheio

$w_3$  = peso do cabo submerso, com reforço e cheio

$$\therefore w = \frac{99.4 \times 15. + 242 \times 45.3 + 20. \times 71.5}{277}$$

$$w = 50,1213 \text{ kgf/m}$$

Com a carga, calcula-se a força vertical  $F_4$ :

$$F_4 = -F_2 + wL; \quad F_2 = 0$$

$$F_4 = 50.1213 \times 277 = 13883.6 \text{ kgf}$$

$$F_3 = \frac{F_4}{\operatorname{tg}(86^\circ)} = 970 \text{ kgf} = -F_1 \quad (\text{Protensão})$$

Calcula-se as tensões nas extremidades:

$$T_I = |F_1| = 970 \text{ kgf}$$

$$T_J = \sqrt{F_3^2 + F_4^2} = 13917.443 \text{ kgf}$$

Aplicando a fórmula para o comprimento inicial:

$$L_u = L - \frac{1}{2EAw} \left[ F_2 T_I + F_4 T_J + F_1^2 \ln \left( \frac{F_4 + T_J}{T_I - F_2} \right) \right]$$

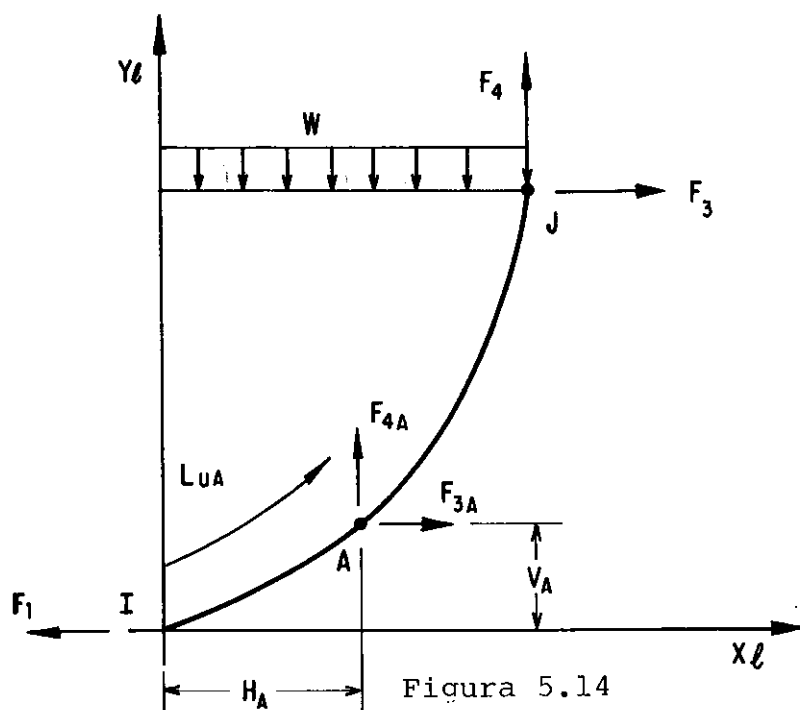
Encontra-se:

$$L_u = 276.9918 \text{ m}$$

O comprimento inicial total calculado, deverá ser dividido em vários comprimentos para que se possa discretizar o mangote. A discretização é feita com o objetivo de se obter uma melhor representação das forças de fluido induzidas, já que as mesmas variam com a profundidade. Procurou-se utilizar elementos menores nas regiões de variação do ponto de contato fluido-elemento e de variação de contato com o fundo (ver figura 5.19).

#### - Cálculos de Pontos sobre a Catenária

Para que se possa discretizar a estrutura, é necessário calcular as coordenadas dos pontos sobre a catenária. Tendo as forças nas extremidades, as coordenadas são calculadas para um certo comprimento de cabo a partir da extremidade I até um certo ponto A escolhido.



As forças na extremidade A, cujas projeções se quer calcular, são conhecidas:

$$F_{3A} = - F_1$$

$$F_{4A} = wL_{uA}$$

$$T_A = \sqrt{F_{3A}^2 + F_{4A}^2}$$

E as projeções são calculadas pelas fórmulas

$$H_A = - F_1 \left[ \frac{L_{uA}}{EA} + \frac{1}{w} \ln \left( \frac{F_{4A} + T_A}{T_I - F_2} \right) \right]$$

$$V_A = \frac{1}{2EAw} (T_A^2 - T_I^2) + \frac{T_A - T_I}{w}$$

Este processo é repetido para todos os pontos da malha de elementos finitos.

Para malhas mais refinadas é conveniente automa-

tizar o processo inserindo as fórmulas apresentadas numa calculadora, tornando-o mais cômodo e preciso já que os valores são calculados internamente.

Pode-se recorrer ainda, a uma análise do cabo sob ação do peso próprio, pedindo o cálculo de pontos sobre a catenária ao fim do processo, pontos estes usados como coordenadas para a nova análise.

#### - Cargas de fluido atuando

Foram adotados valores de ondas e correntes considerados típicos da costa brasileira:

Onda : Período : 10,8 seg

Amplitude: 12,9 m

Offset : 65.0 m

Correntes: Velocidade na superfície: 1,45 m/s

Velocidade no fundo : 0,25 m/s

#### - Molas Não-Lineares

Para simular a presença do fundo do mar no modelo estrutural, usaram-se molas não-lineares que permitem o livre movimento na direção vertical para cima e restringem o movimento contrário ao fundo.

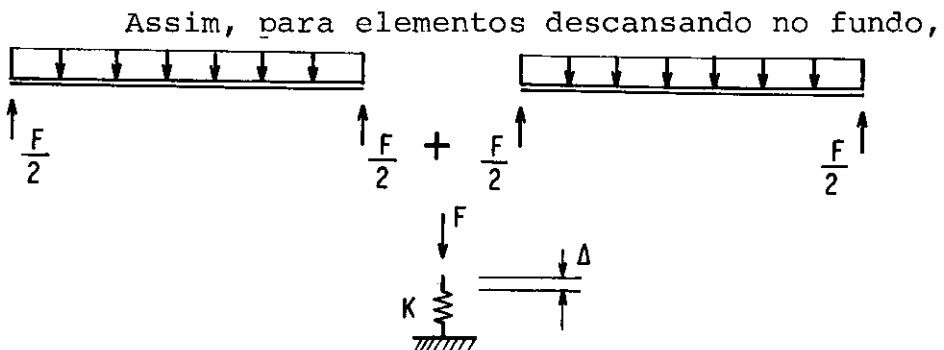


Fig. 5.15

onde:  $F$  - ação do peso submerso de 2 elementos contíguos  
 $k$  - rigidez assumida para o fundo



Para cálculo da rigidez ( $k$ ), adota-se uma tolerância tal, que os deslocamentos sejam suficientemente pequenos e a rigidez não introduza problemas de mal condicionamento da matriz global, ou de convergência no processo iterativo não-linear.

Sendo assim, adotou-se uma tolerância de 2 mm. A função não-linear para o solo é representada na figura (5.16).

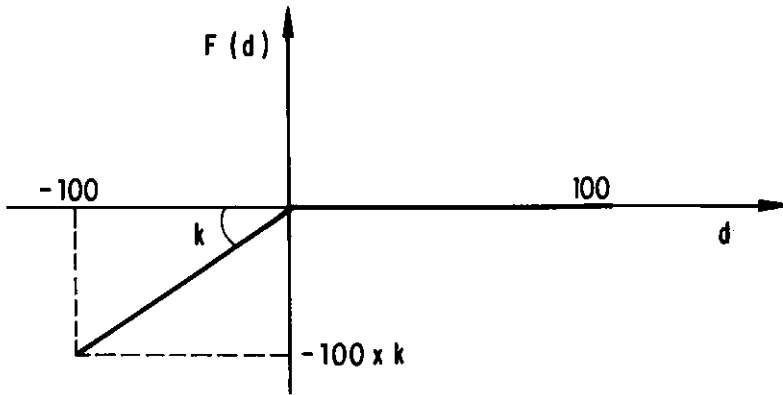


Figura 5.16

Para o caso de nós que na posição inicial não estavam sobre o fundo, adotou-se a função não-linear da seguinte forma:

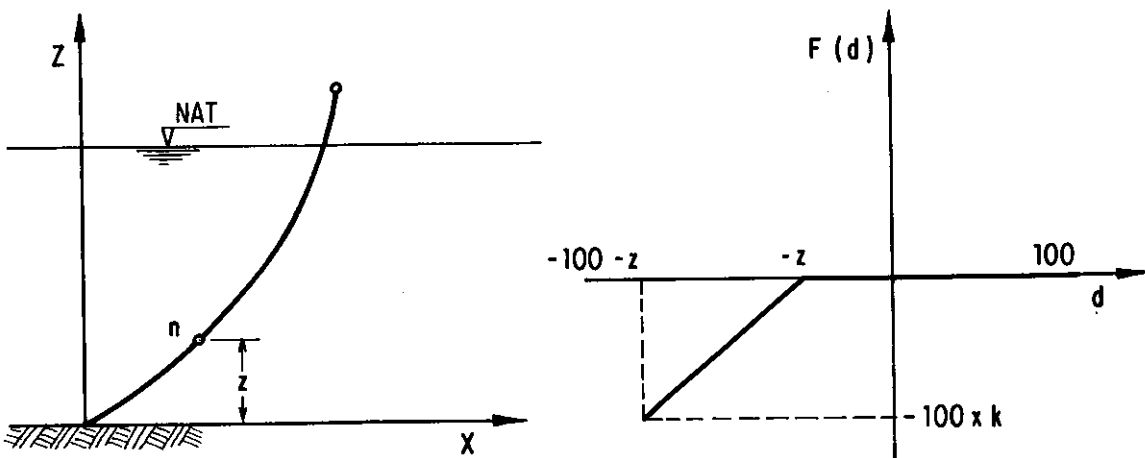


Figura 5.17

A função é tal que, caso o elemento se desloque na direção do fundo mais que sua coordenada inicial, a mola começa a agir.

#### - Análises Efetuadas

O mangote foi discretizado em 28 elementos como pode ser observado na figura (5.19).

Foram feitas análises considerando a atuação das cargas de ondas e correntes em 2 sentidos,  $0^\circ$  e  $180^\circ$ , e variando-se o coeficiente de arraste normal, para o qual adotou-se ora o valor mínimo recomendado pela DnV de 0,7, ora o valor conservador de 1,2.

As deformadas para cada um dos sentidos de atuação da corrente são apresentadas nas figuras (5.20) e (5.21).

Pode-se observar a ocorrência de grandes deslocamentos e de acentuado efeito de contato variável com o fundo.

As forças junto à plataforma obtidas para cada uma das análises efetuadas são resumidas no quadro (5.3).

O cálculo da força no topo do mangote se revelou bastante sensível à variação do coeficiente de arraste normal, tendo apresentado diferenças de até 40%.

ÂNGULO DE ATAQUE				
$0^\circ$			$180^\circ$	
$C_D$	$F_X$	$F_Z$	$F_X$	$F_Z$
0,7	-5740	13593	8076	10196
1,2	-9895	12568	11052	7836

Quadro de Forças no n.º 1 (kgf)  
Conforme Convenção da Figura (5.19)  
Quadro 5.3

DIÂMETRO (mm)	INTERNO	203.2
	EXTERNO	259.
	C/ REFORÇO	275.
PESO NO AR (kgf/m)	VAZIO	66.2
	CHEIO	99.4
PESO NA ÁGUA (kgf/m)	VAZIO	12.1
	CHEIO	45.3
PESO ADICIONAL DO REFORÇO (kgf/m)	AR	30.0
	ÁGUA	26.2
ÁREA DA SEÇÃO TRANSVERSAL (m <sup>2</sup> )		0.0203
MASSA ESPECÍFICA (kgf.s <sup>2</sup> /m <sup>4</sup> )	C/ REFORÇO	192.7
	S/ REFORÇO	242.90
MÓDULO DE ELASTICIDADE (kgf/m <sup>2</sup> )		2.0 x 10 <sup>10</sup>

## CARACTERÍSTICAS DO MANGOTE

QUADRO 5.4.

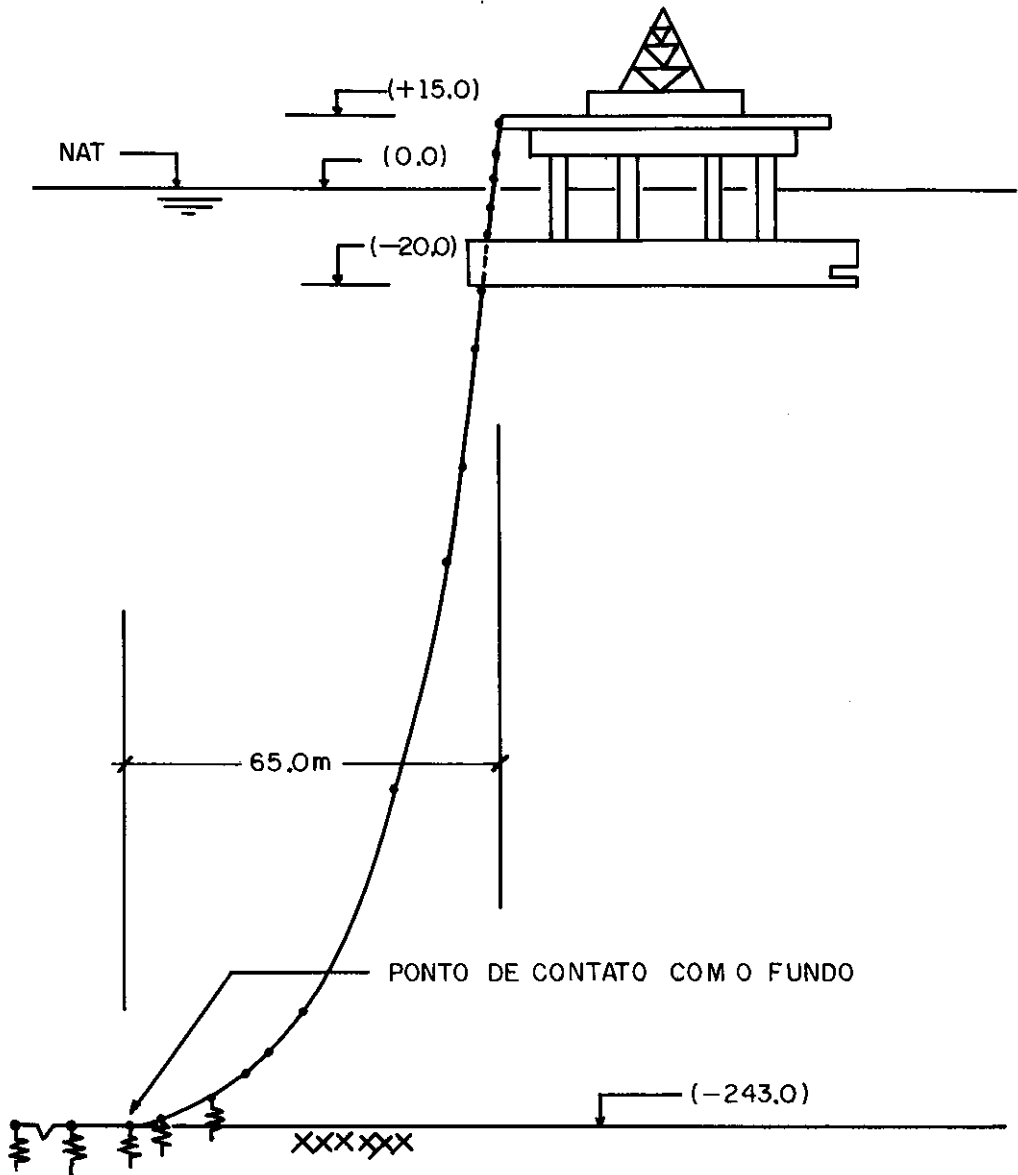


FIGURA 5.18

SISTEMA DE PRODUÇÃO ANTECIPADA

PLATAFORMA SEMI-SUBMERSÍVEL

MANGOTE FLEXÍVEL - 8 POL.

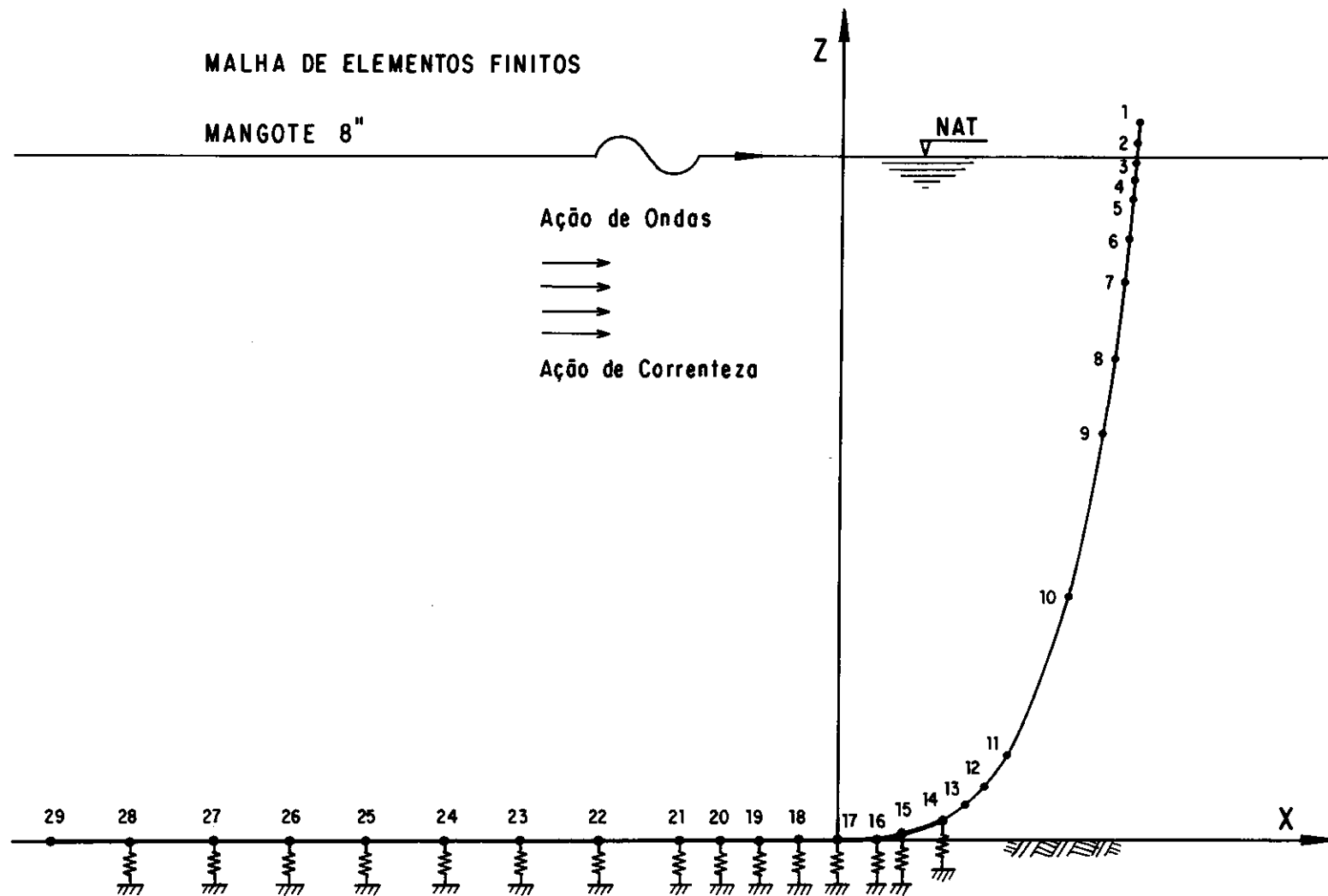


Figura 5.19

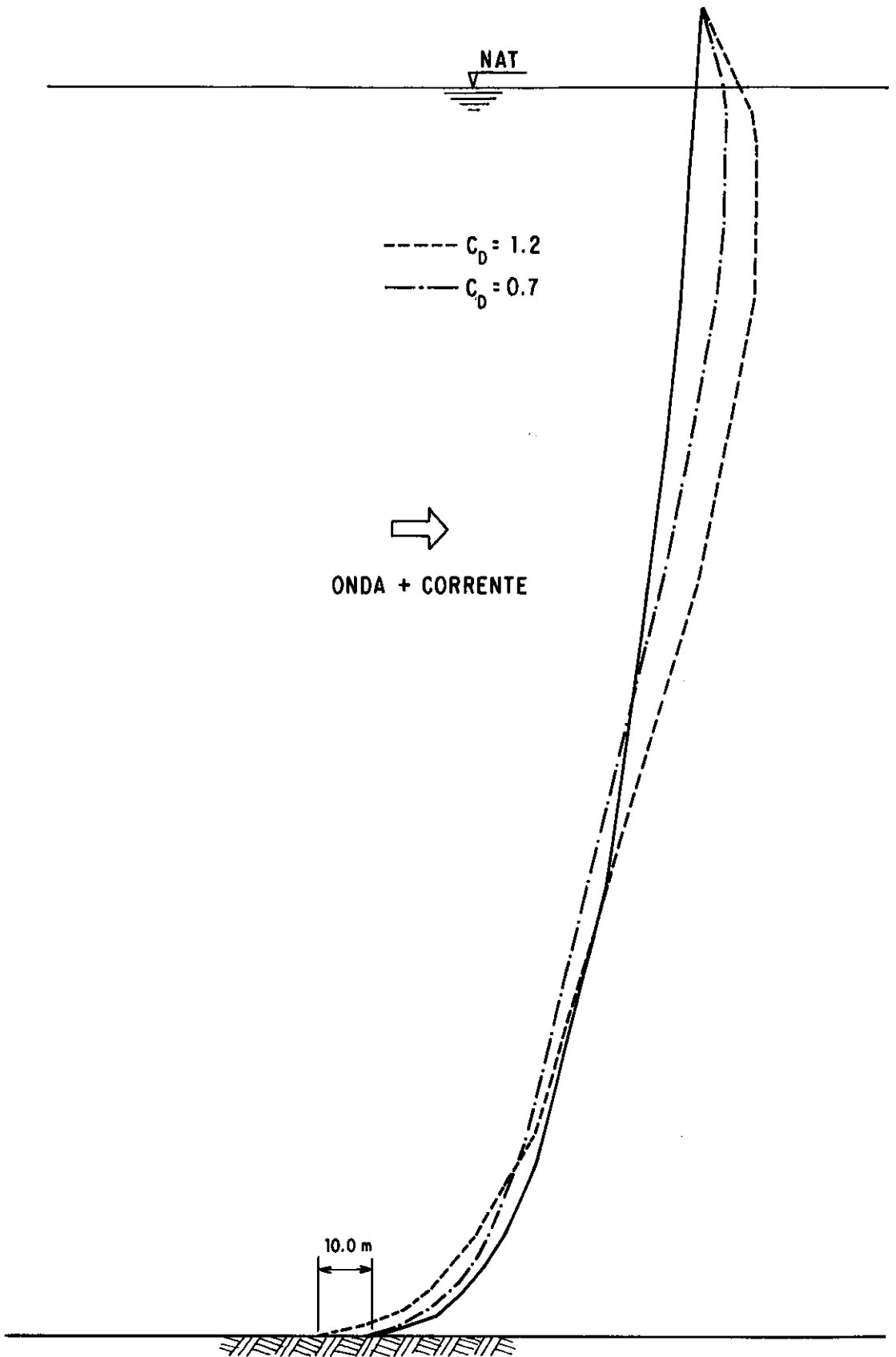


Figura 5.20

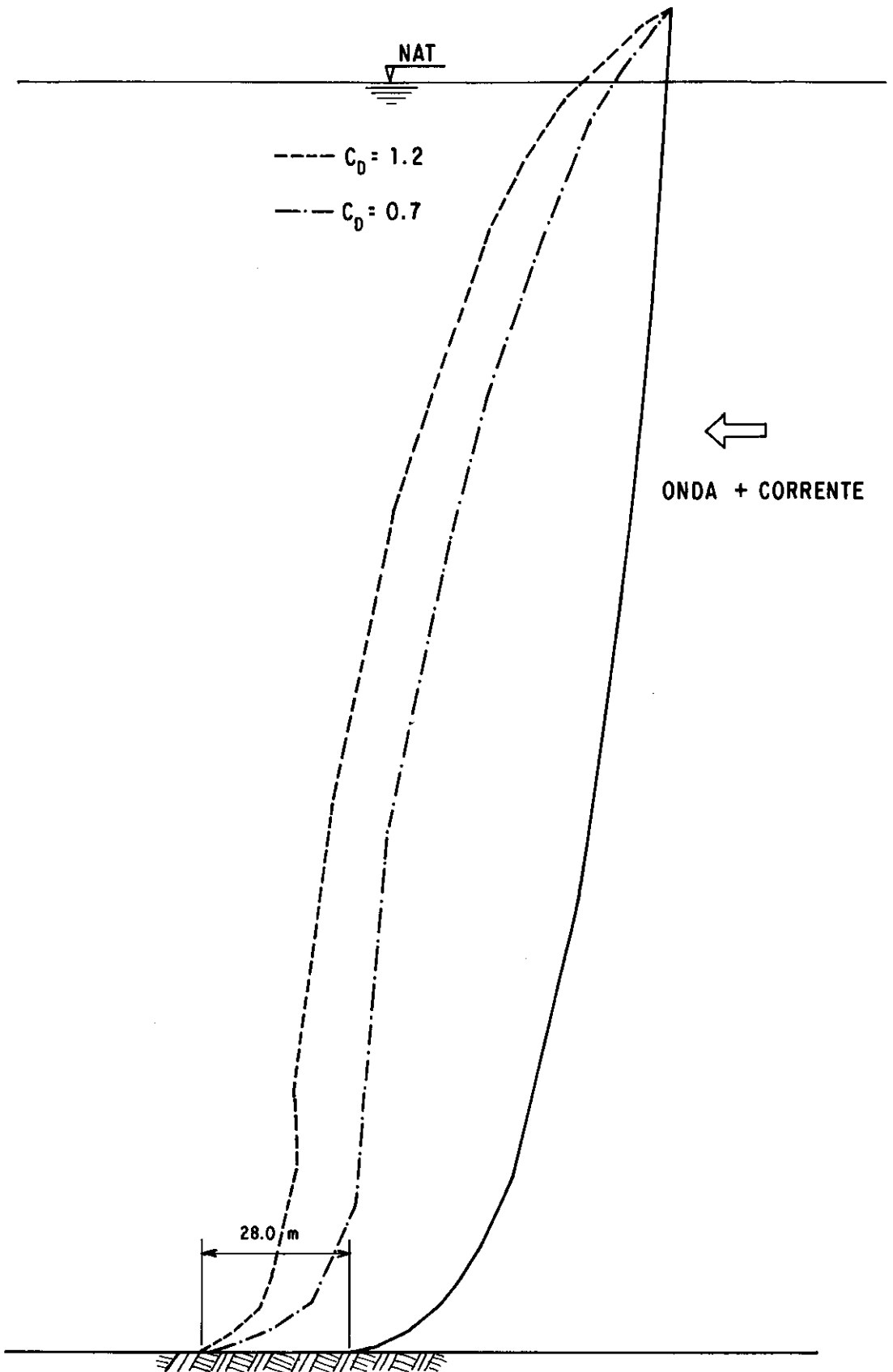


Figura 5.21

#### 5.4. Dinâmica de um Cabo Prê-Tensionado

A estrutura analisada se constitui de um cabo prê-tensionado, apresentado por Jayaraman<sup>1</sup> que fez uma comparação entre o elemento catenária, o elemento de treliça de 3 nós e o elemento proposto por Ozdemir<sup>2,2</sup>.

O cabo é considerado em sua posição inicial de uma reta ligando os nós como mostrado na figura (5.22).

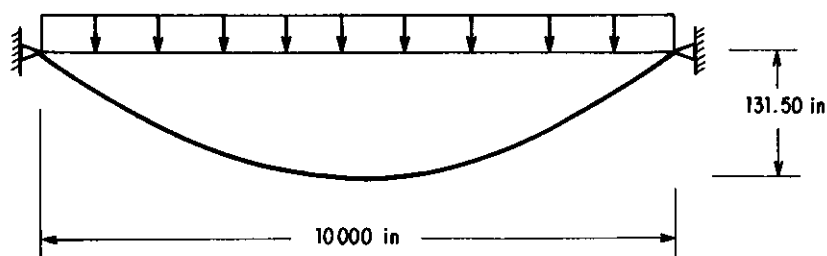


Figura 5.22

Os dados principais são:

Área da Seção: 0,065 pol<sup>2</sup>

Módulo de Elasticidade:  $20 \times 10^6$  lb/pol<sup>2</sup>

Tensão Inicial:  $20 \times 10^3$  lb/pol<sup>2</sup>

Comprimento Inicial: 9990,0099 pol

Peso Próprio: 0,02 lb/pol

Massa Específica: 0,000796 lb pol<sup>2</sup>/s<sup>4</sup>

Inicialmente fez-se uma análise estática para vários níveis de carga com o peso multiplicado por vários fatores. Foi utilizada simetria na análise, como mostrado na figura (5.23).



Os resultados obtidos foram colocados numa tabela por Jayaraman, aqui reproduzida, em que se comparam os resultados obtidos, utilizando-se os seguintes recursos:

- . Malha de 12 elementos de 3 nós-Ozdemir
- . Malha de 10 elementos de 3 nós-Haase
- . Malha de 20 elementos de treliça-Knudson
- . Malha de 2 elementos de catenária

PARÂMETRO DE CARGA	DESLOCAMENTO CENTRAL (pol)			
	ELEMENTO CATENÁRIA	ELEMENTO TRELIÇA	ELEMENTO 3 NÓS	OZDEMIR*
1	-131,50	-131,45	-131,44	-131,60
3	-234,22	-234,21	-234,16	-231,00
5	-292,80	-292,82	-292,75	-288,0
7	-336,06	-336,07	-336,0	-331,0
9	-371,16	-371,18	-371,11	-368,00

Quadro 5.5

\* Os valores que não o de parâmetro 1, foram inferidos de um gráfico apresentado por Ozdemir.

Pode-se observar a vantagem obtida, utilizando -se o elemento catenária em que foram necessários apenas 2 elementos.

A análise dinâmica é feita para uma carga de 0,2 lb/pol subitamente aplicada ao cabo em sua posição de equilíbrio sob peso próprio, obtido para o nível de carga 1 (figura 5.23).

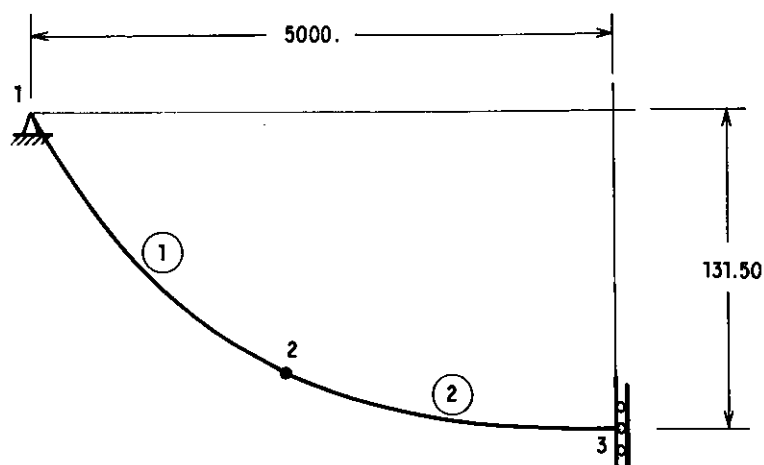


Figura 5.23  
Posição de Equilíbrio sob Peso Próprio

Foram utilizados 20 elementos de catenária na discretização do cabo, utilizando-se simetria. Valores para o primeiro máximo de deslocamento são fornecidos por Jayaraman , que se utilizou do Método de Diferenças Centrais e um intervalo de tempo de 0,0013 segundos.

Estes resultados são comparados com os obtidos com o programa que se utiliza de um método implícito de integração das equações, o Método de Newmark. O intervalo de tempo empregado foi de 0,026 segundos. Foram feitas análises através de integração direta das equações do movimento e pelo método de superposição modal, com 5 modos.

A resposta dinâmica do cabo pelos 2 métodos é apresentada na figura (5.24).

Os valores de deslocamento para o primeiro máximo são apresentados no quadro (5.6).

O valor máximo para o deslocamento central apresenta uma diferença de apenas 1,8% em relação ao resultado ob

tido por Ozdemir, que se utiliza de matriz de massa consistente e elemento com tensor de deformação de Green-Lagrange.

VALOR DA PRÉ-TENSÃO (lb/pol <sup>2</sup> )	DESLOCAMENTO PARA 1º MÁXIMO (pol)				
	INT.DIRETA $\Delta t = 0,026$	SUP. MODAL $\Delta t = 0,026$	JAYARAMAN $\Delta t = 0,0013$	ELEMENTO TRELIÇA	OZDEMIR
$20 \times 10^3$	-605,2	-594,0	-633,10	-633,56	-616,0

Quadro 5.6

Aproveitando as facilidades do sistema LORANE-NL, onde o elemento catenária se acha também implementado, foram feitas análises utilizando o operador implícito de Newmark, por integração direta e por superposição modal e o operador explícito das diferenças centrais por integração direta.

Os resultados obtidos para o método das diferenças centrais pouco diferem daqueles obtidos pelo método de Newmark, sendo o esforço computacional empregado naquele método bem maior. Na figura (5.25), pode-se observar o gráfico dos deslocamentos do nó central e a comparação dos tempos de processamento gastos em cada análise.

Nestas análises foram impressas as tensões no elemento central, para efeito também de comparação, tendo o método da Superposição Modal apresentado diferenças de até 40% em relação ao método direto usando operador explícito. Isto se deve ao fato de que o problema excita modos superiores que não foram incluídos na análise. No quadro (5.7), os valores das tensões calculadas ao longo do tempo são apresentados onde os erros percentuais foram calculados em relação ao método das diferenças centrais.

t (seg)	SUPERPOSIÇÃO MODAL OPERADOR DE NEWMARK $\Delta t = 0,026$ segs	ERRO %	INTEGRAÇÃO DIRETA OPERADOR DE NEWMARK $\Delta t = 0,026$ segs	ERRO %	INTEGRAÇÃO DIRETA DIFERENÇAS CENTRAIS
0,13	2374	2,1	2342	3,5	2426
0,26	3658	16,1	4128	5,3	4359
0,39	5258	29,6	7128	4,5	7464
0,52	6666	38,4	10477	3,2	10828
0,65	6759	41,6	11761	1,7	11566
0,78	5736	33,6	9006	4,2	8643
0,91	3905	24,1	5585	8,5	5147

Quadro 5.7  
Tensão no Elemento Central (1b)

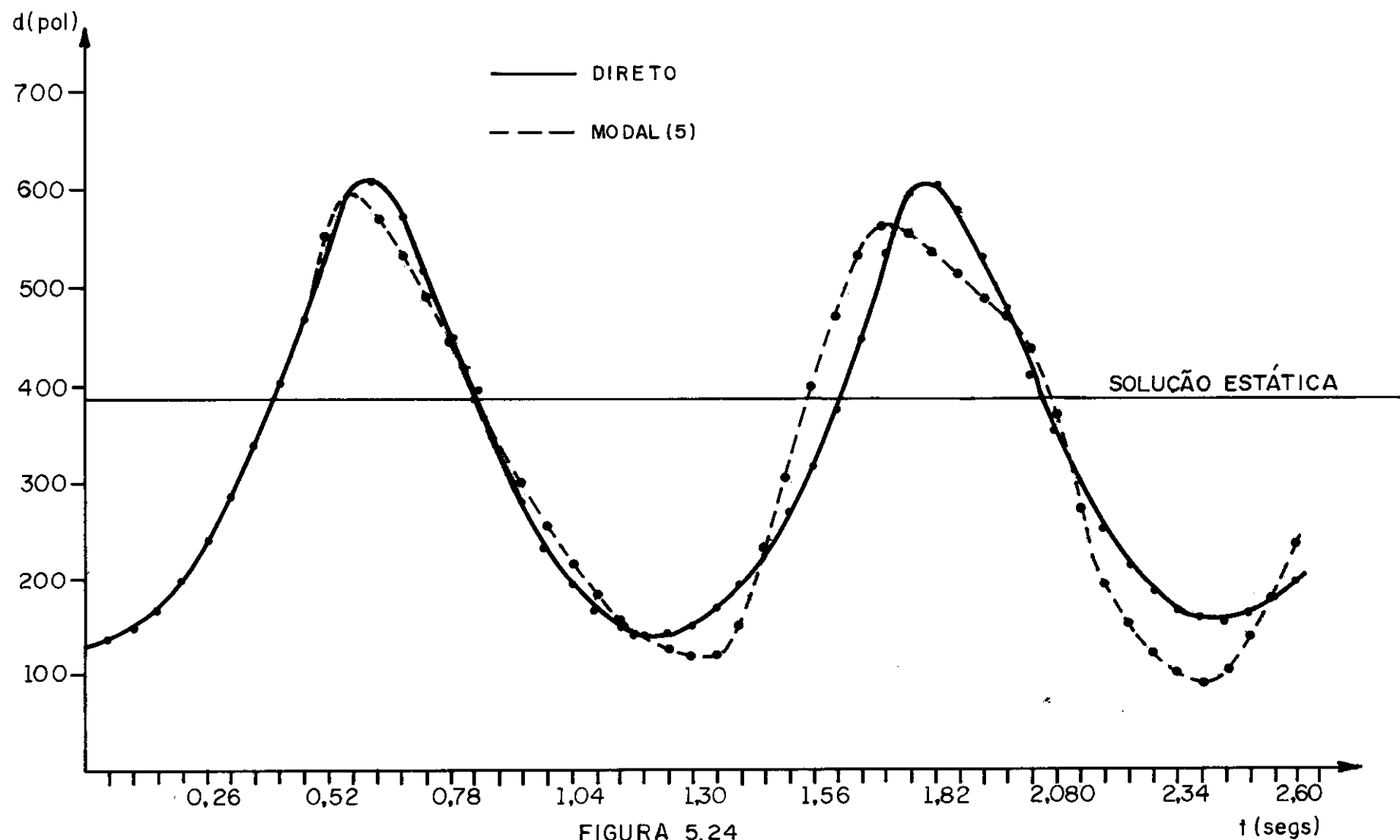


FIGURA 5.24  
DESLOCAMENTO DO NÓ CENTRAL  
INT. DIRETA x SUP. MODAL

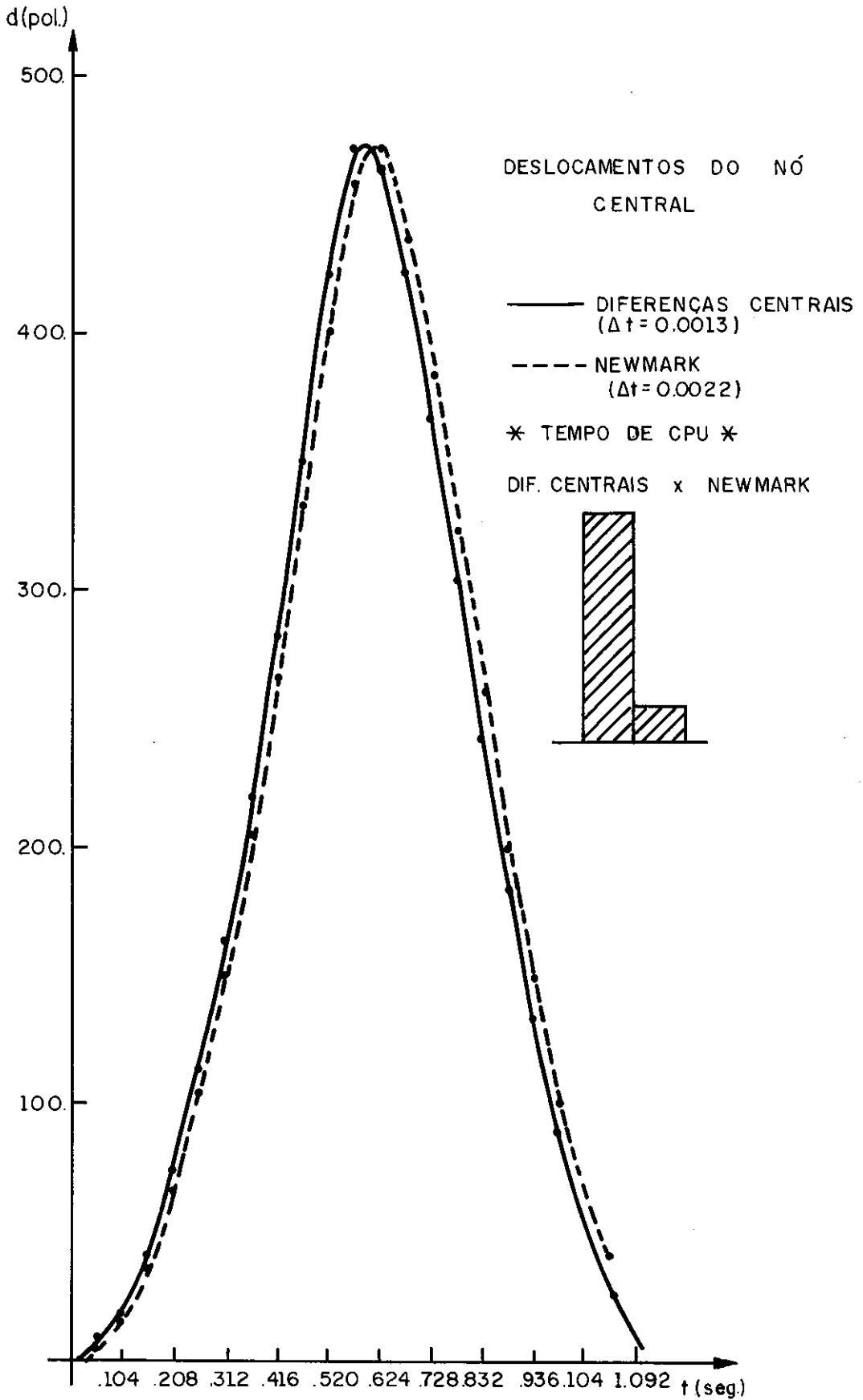


Figura 5.25

### 5.5. Resposta Dinâmica de uma Linha de Amarração

Este exemplo trata da análise de uma linha de amarração de uma plataforma semisubmersível, descrita por Peyrot<sup>8</sup>.

A excitação dinâmica se constitui num deslocamento imposto à extremidade superior do cabo, que procura traduzir o movimento da plataforma sob ação do mar. Este deslocamento se dá ao longo de uma elipse centrada no ponto de equilíbrio estático com um eixo horizontal de 10,8 m e vertical de 9,0 m. O período do movimento é de 14,0 segundos.

Os dados da linha de amarração são resumidos no quadro (5.8).

CARACTERÍSTICAS	TIPO DE CABO		
	CABO TIPO 1	CORRENTE	CABO TIPO 2
$L_u$ (m)	700	290	395
w (peso no ar) (kN/m)	0.432	6.219	0.432
MOD. ELASTICIDADE $E$ (kN/m <sup>2</sup> )	82000000.	30500000.	68 000 000.
DIÂMETRO (m)	0.084	0.325	0.084
CN	1.45	1.51	1.45
$C_M$	2.0	2.0	2.0
AE (kN)	450 400	2532000	374 500
$\rho$ . MASSA ESP. (kN.s <sup>2</sup> /m <sup>4</sup> )	8.0067	7.642	8.0067
w (peso submerso) (kN/m)	0.378	5.406	0.378

Quadro 5.8 .

Características da Linha

O comprimento total de cabo é de 1385 m. A profundidade da lâmina d'água é de 155,0 m e a distância horizontal até a âncora é 1365,68 m. A pré-tensão nos cabos é de 2224 kN. A linha funcionará com um grande comprimento em contato com o fundo, o que torna necessária a especificação de molas não-lineares.

O primeiro passo para a análise é encontrar a configuração do cabo sob peso próprio. Para isso, é necessário que se realize uma análise estática ao final da qual serão fornecidos pontos sobre a catenária que permitirão uma melhor discretização visando à análise dinâmica.

A configuração inicial para a análise sob peso próprio, deve ser fornecida de forma coerente para não causar problemas de convergência. A região próxima ao ponto de contato com o fundo deve ser melhor discretizada para que se tenha um certo grau de precisão no cálculo da configuração final.

Dessa forma, necessita-se uma previsão do ponto de contato com o fundo. Este valor é calculado considerando-se o cabo como tendo uma única característica ao longo de seu comprimento e aplicando-se as equações da catenária.

O peso e a rigidez do "cabo equivalente" são calculados ponderando-se os valores para cada trecho pelos comprimentos correspondentes.

Sendo assim:

$$w = \frac{\sum_{i=1}^n w_i L_i}{L} \quad \text{e} \quad (AE) = \frac{\sum_{i=1}^n (AE)_i L_i}{L}$$



onde  $w_i$  - peso submerso do trecho  $i$   
 $L_i$  - comprimento de cabo no trecho  $i$   
 $L$  - comprimento total  
 $(AE)_i$  - módulo de rigidez do trecho  $i$   
 $w$  - peso do "cabo equivalente"  
 $(AE)$  - módulo de rigidez do cabo equivalente

Com os dados do cabo equivalente, resta aplicar as equações da catenária na situação apresentada na figura (5.26) para cálculo dos valores da projeção horizontal  $H$ , até o encontro com o fundo.

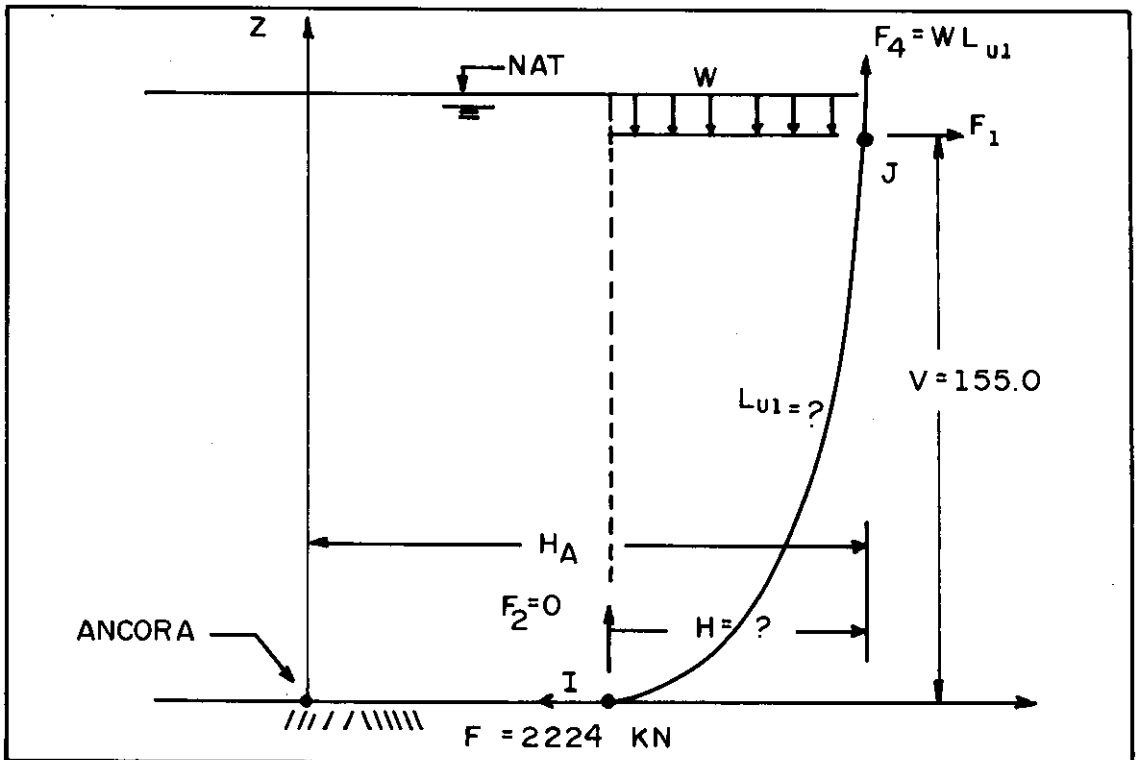


Figura 5.26

Incógnitas para cálculo do Ponto de Contato

Considerando-se as equações para a catenária e -  
lástica obtidas na seção 2.3 , a projeção vertical (V) é dada  
por:

$$V = \frac{1}{2EAw} (T_J^2 - T_I^2) + \frac{T_J - T_I}{w}$$

Observando a expressão é evidente que a única  
incôgnita é a tensão no nó J ( $T_J$ ), já que  $T_I$  é igual à proten-  
são ( $F_1$ ).

Resolvendo a equação do 2º grau em  $T_J$  pode-se ob-  
ter  $F_4$ :

$$F_4 = \sqrt{T_J^2 - F_1^2}$$

$$\Rightarrow Lu_1 = \frac{F_4}{w}$$

Tomando-se a expressão (2.17), determina-se o va-  
lor da projeção horizontal (H) para o "cabo equivalente". Va-  
le repetir que a projeção horizontal assim calculada represen-  
ta uma aproximação que tem por objetivo possibilitar que se  
forneça uma posição inicial razoável para o cálculo da confi-  
guração estática sem acarretar problemas de convergência. Es-  
te processo apresentado para cálculo do ponto de toque no fun-  
do, como se viu, se resume à aplicação de um pequeno número  
de equações, se constituindo num cálculo expedito.

#### - Cálculo de H para o "cabo equivalente"

Inicialmente, considerou-se a contribuição dos  
tres trechos para este cálculo. Aplicando-se as fórmulas já  
apresentadas para:

$$w = \frac{w_1 L_1 + w_2 L_2 + w_3 L_3}{L} = 1,43 \text{ kN/m}$$

$$(AE) = 865 \ 000 \text{ kN}$$

$$\text{Foi obtido } H = 685.0 \text{ m}$$

Este valor corresponde a uma situação em que a corrente está totalmente suspensa não tendo, portanto, nenhum ponto de contato com o fundo. Sabe-se, entretanto, que isto não corresponde a uma situação real em que a corrente normalmente funciona em contato com o fundo. Conclui-se que o modelo de "cabo equivalente" adotado não permite uma boa aproximação.

O que ocorre, na realidade, é que o cabo nº 1, raramente deixa de estar em contato com o fundo.

Como uma nova tentativa, pode-se adotar o cabo equivalente como formado por apenas a corrente e o cabo nº 3.

Dessa forma, tem-se os dados:

$$w = \frac{w_2 L_2 + w_3 L_3}{(L_2 + L_3)} = 2,51 \text{ kN/m}$$

$$(AE) = \frac{(AE)_2 L_2 + (AE)_3 L_3}{(L_2 + L_3)} = 1290000 \text{ kN}$$

Ao final dos cálculos chega-se a:

$$H = 510.2 \text{ m} ; \quad Lu_1 = 538,0 \text{ m}$$

Descontando-se o comprimento inicial do cabo nº 3, calcula-se que o comprimento de corrente suspenso é de 143m.

Como se vê, corresponde aproximadamente ao ponto central da corrente.

A partir destes dados, discretizou-se a corrente em 10 elementos de 29,0 m. cada, adotando-se como aproximação inicial para o ponto de toque no fundo o valor para  $H = 520,68$  m, próximo àquele calculado. Para o comprimento de linha que não está em contato com o fundo, foram calculadas as coordenadas dos pontos, supondo-os em linha reta, como se pode observar na figura (5.27).

No caso deste exemplo, a protensão no cabo era conhecida, o que permitiu que os cálculos iniciais para lançamento da malha fossem mais precisos. Quando a protensão não for conhecida, deverá ser assumido um valor, arbitrariamente, para que se possa obter uma razoável estimativa da geometria inicial, que não leve a problemas de convergência.

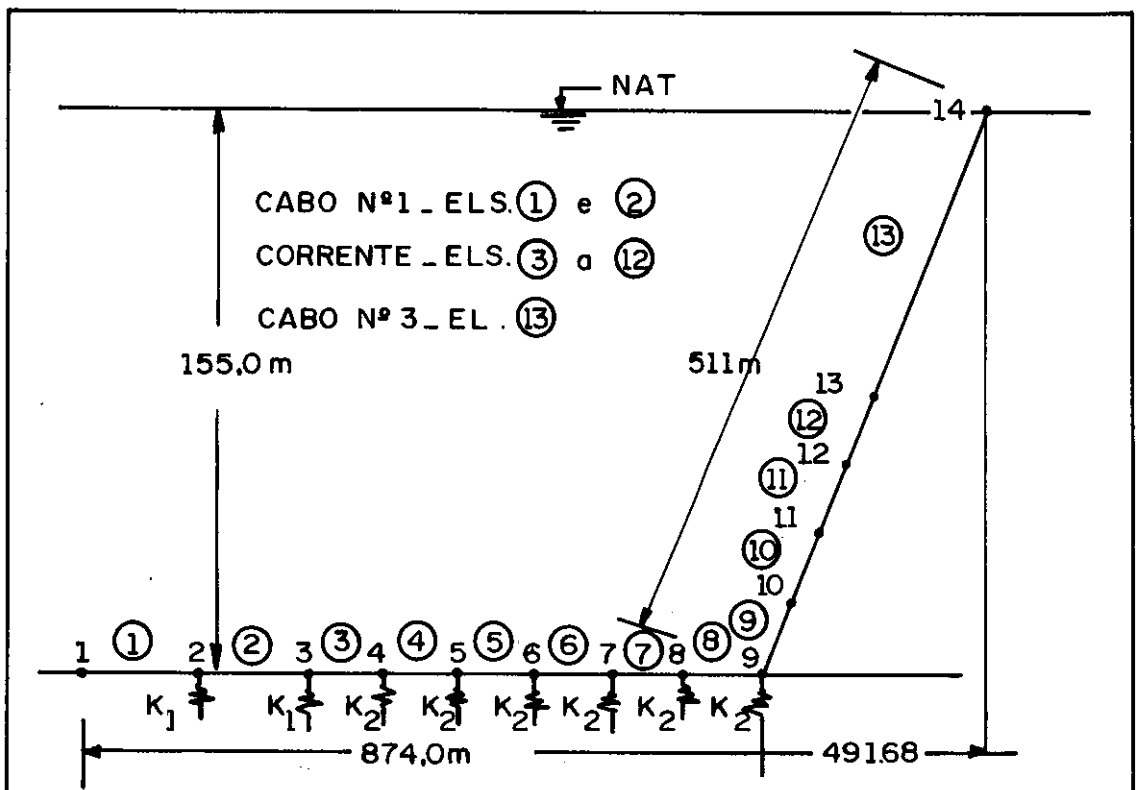


Figura 5.27

Malha Para Análise Estática

As rigidezas das molas não-lineares foram calculadas da forma como foi apresentado na seção 5.3 , com uma tolerância de 2 cm.. Sendo assim, os valores calculados foram:

$$k_1 = 7000 \text{ kN/m}$$

$$k_2 = 8000 \text{ kN/m}$$

Não foram necessárias mais que 6 iterações para que se chegasse à configuração de equilíbrio, tendo sido determinado o ponto de contato com o fundo no nó 8, bastante próximo do ponto calculado pelo processo de cálculo expedito apresentado.

Obtida a configuração sob peso próprio, pode-se passar à análise dinâmica com o cabo nº 3, tendo sido discretizado em 10 elementos de igual comprimento a partir das coordenadas calculadas ao fim da análise estática.

Para a análise dinâmica, foram especificadas 11 molas não-lineares ligadas aos nós que poderiam vir a entrar em contato com o fundo. As rigidezas adotadas foram duas:

$$k_1 = 7000 \text{ kN/m para os nós 2 e 3 e}$$

$$k_2 = 8000 \text{ kN/m para os restantes.}$$

Foram adotadas 8 funções força-deslocamento diferentes, devido aos nós que inicialmente não se encontravam em contato com o fundo. Estas funções foram calculadas segundo o que foi apresentado na seção 5.3 .

Durante a análise dinâmica pode-se observar uma razoável variação do ponto de contato com o fundo. Na figura (5.28) são apresentadas a configuração inicial, com a malha adotada, e as configurações extremas em termos de variação do

ponto de contato.

As tensões calculadas para o elemento junto à plataforma, apresentam uma razoável concordância em relação aos valores obtidos por Peyrot<sup>8</sup>, considerando-se que este usou operador explícito para integração das equações e adotou apenas um elemento na representação da corrente, aproveitando a capacidade de seu programa de calcular o ponto de contato dentro da própria rotina de cálculo de força nas extremidades dos cabos. Esta facilidade, no entanto, levou a uma representação mais grosseira da distribuição de massa no ponto de maior peso específico da linha. No quadro (5.9) resumem-se os valores extremos obtidos no programa e aqueles apresentados por Peyrot.

	TENSÃO NO ELEMENTO 17 (kN)	
	MÁXIMA	MÍNIMA
OPERADOR EXPLÍCITO PEYROT $\Delta t = 0,01$ segs.	3767	1048
OPERADOR IMPLÍCITO PROGRAMA $\Delta t = 0,025$ segs.	3920	1127
DIFERENÇA (%)	4,0	7,5

Quadro 5.9  
Comparação de Tensões Máximas e Mínimas

Na figura (5.29) apresenta-se a tensão no elemento 17 ao longo do tempo. Para efeito de comparação, calculou-se a tensão no elemento 17 para a situação estática, fa-

zendo-se a coordenada do nó superior igual a alguns pontos sobre a elipse. Os resultados obtidos nas análises estática e dinâmica são reunidos no quadro ( 5.10 ), não se observando diferenças significativas.

PONTOS SOBRE A ELIPSE*		TENSÃO - ELEMENTO 17 (kN)	
		ESTÁTICA	DINÂMICA (1º período)
1	x = 5.4 m	3601	3828
	z = 0.0		
2	x = 0.0	2707	2269
	z = 4.5		
3	x = - 5.4	1534	1297
	z = 0.0		
4	x = 0.0	2137	2366
	z = - 4.5		

\* Em relação à posição de repouso

Quadro 5.10

#### Comparação de Tensões Estática e Dinâmica

Considerando-se que a tensão máxima obtida na análise dinâmica foi de 3920 kN e na resposta estática ela é máxima para a posição 1 do quadro (5.10) (3601 kN), conclui-se que a diferença obtida foi de 8,0% apenas, caracterizando um comportamento quase-estático.

Para o elemento 6, na região da corrente, que pode ser identificado na figura (5.28) a tensão máxima durante a análise dinâmica foi de 4228.7 kN. Na situação estática a tensão máxima calculada é de 3396 kN que corresponde à posição 1 do quadro ( 5.10 ). A diferença na tensão máxima é de

aproximadamente 20% entre as análises estática e dinâmica.

Para este exemplo, pode-se observar que o uso do operador implícito de Newmark não se revelou vantajoso como no exemplo (5.4). Naquele exemplo o intervalo de tempo empregado pode ser 20 vezes maior que o utilizado no método de diferenças centrais. Nesta análise de uma linha de amarração o intervalo de tempo utilizado pode ser apenas 2,5 vezes maior que o utilizado por Peyrot com integração explícita. Isto talvez se deva à forte não-linearidade que é introduzida no problema pelo movimento da extremidade superior, pela consideração do amortecimento devido ao fluido que é proporcional ao quadrado da velocidade relativa fluido-estrutura, e pelo contato variável da corrente com o fundo.

A linha de amarração apresenta um período fundamental de 10,1 segundos. Na figura (5.30) pode-se observar os 4 primeiros modos de vibração obtidos.



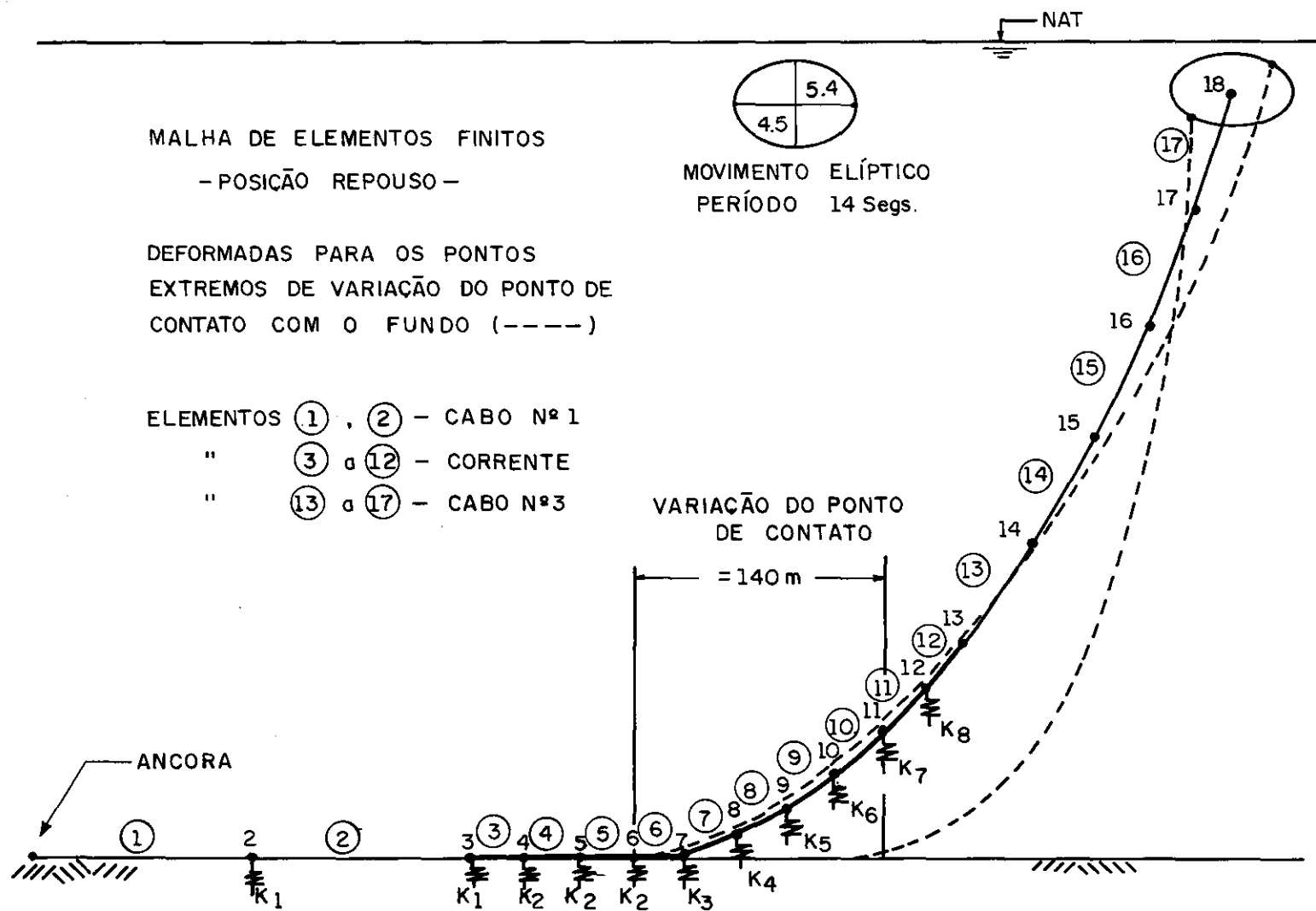


FIGURA 5.28

MALHA DE ELEMENTOS FINITOS

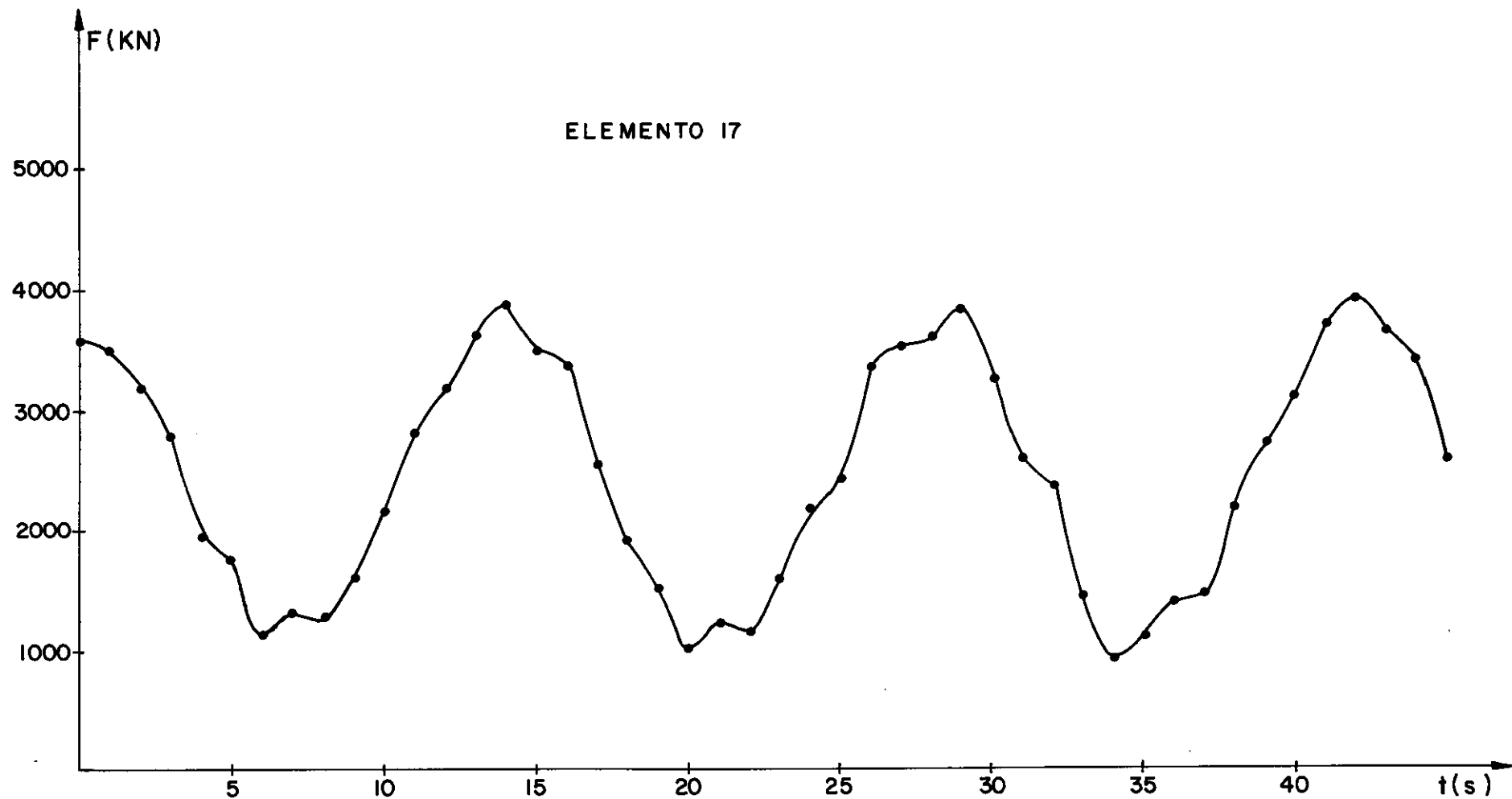


Figura 5.29  
Força no Elemento 17

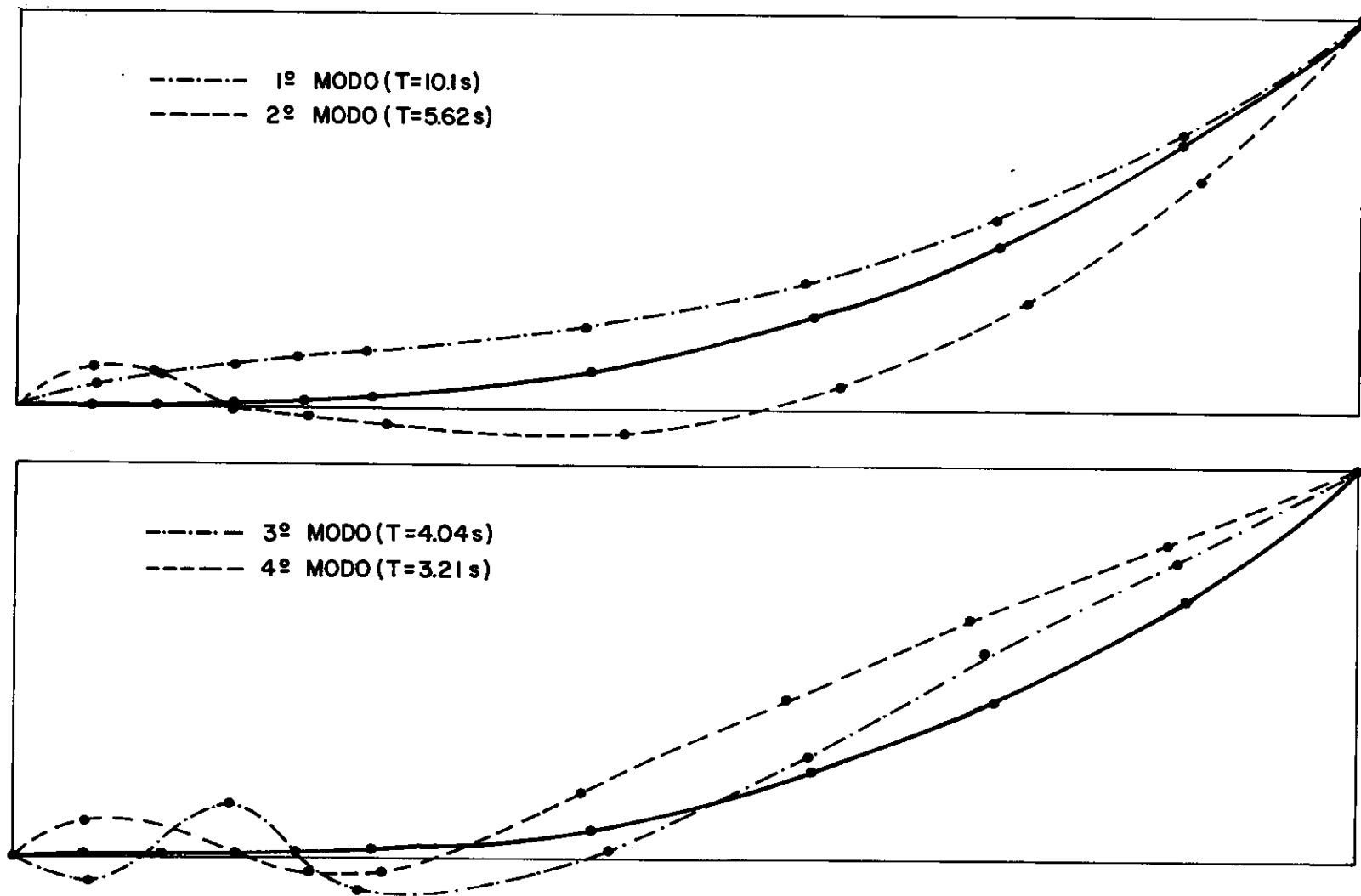


Figura 5.30  
Modos de Vibração

## CAPÍTULO VI

CONCLUSÃO

Este estudo procurou relatar alguma experiência adquirida na análise de estruturas marítimas com cabos, através do uso do elemento catenária na representação dos cabos.

Este elemento, que se baseia num processo iterativo de flexibilidade, pode ser facilmente adaptado a um programa de elementos finitos, modelo de deslocamentos, para análise não-linear.

Quando do início deste trabalho, alguns estudos já haviam sido realizados sobre o elemento catenária na COPPE/UFRJ, por Creus<sup>52</sup>, e posteriormente este elemento foi implementado no sistema LORANE/NL. Pode-se comprovar a grande capacidade de convergência do elemento em face de problemas de grande não-linearidade geométrica, principalmente se comparado a elementos retos. Também foram estudados alguns casos de vibrações de cabos suspensos.

No presente trabalho, inicialmente procurou-se implementar um procedimento para cálculo da matriz de rotação do cabo em função de um carregamento uniformemente distribuído de caráter tridimensional, que poderia ser proveniente de ações ambientais (ver seção 2.5).

A incorporação da otimização do procedimento para cálculo da matriz de rigidez (seção 2.1), através de apenas uma chamada ao subprograma, proposto por Jayaraman<sup>1</sup>, se revelou bastante eficiente computacionalmente e sem perda de precisão nos cálculos.

Alguns testes foram realizados, no subprograma de cabos, fornecendo-se como valor inicial da força para o processo iterativo, o valor obtido ao final do intervalo de tempo anterior. Esta modificação, apesar da eficiência apresentada ao longo de certas fases da análise dinâmica, se revelou instável em situações em que o cabo está em processo de perda de tensão. Neste caso, o valor inicial fornecido superestimava o valor final a ser calculado, tendo o algoritmo iterativo se revelado bastante sensível a esse tipo de situação, chegando mesmo a não alcançar a convergência após várias iterações. Isto ocorreu em testes realizados com a catenária suspensa do exemplo (5.4). Sendo assim, procurou-se não mais lançar mão deste expediente já que em problemas reais a perda de protensão do cabo ao longo do tempo ocorre com frequência como foi observado no exemplo (5.5).

O elemento catenária se revelou bastante adequado na análise de problemas reais de estruturas marítimas. Suas principais características em comparação com outros elementos são sua grande capacidade de convergência e de modelar mais corretamente o fenômeno físico do "afrouxamento" do cabo. Em problemas estáticos, sua maior capacidade de convergência ficou evidenciada pois raramente é necessário dividir a carga em incrementos ou discretizar muito a estrutura, enquanto que outros elementos exigem esta divisão e se mostram bastante sensíveis ao tamanho dos incrementos e ao refinamento da malha. Para análises dinâmicas, ele tem sido aplicado para análises de problemas reais como no exemplo (5.5).

No entanto, futuras análises poderão ser realizada

das para verificar o comportamento do elemento em outros casos práticos, comparando-o com dados experimentais, se disponíveis, ou ainda, com elementos que tenham sua geometria descrita por polinômios com formulações que considerem grandes deformações e matrizes de massa consistentes. Os exemplos (5.2) e (5.4) apresentam comparações deste tipo em que os resultados encontrados foram bastante próximos. Este tipo de estudo serviria para testar ainda mais o elemento do ponto de vista da precisão e do esforço computacional envolvido em análises dinâmicas em que se é obrigado a ter uma boa discretização da estrutura para representar corretamente a distribuição de massas.

Para a simulação do comportamento de estruturas offshore, desenvolveu-se o módulo para consideração de cargas de ondas, correntes, peso próprio e empuxo em elementos de cabo, e também em elementos de pórtico espacial, prevendo a sua combinação com os de cabo na análise de torres estaiadas ou em quaisquer situações em que se tenham membros cilíndricos cujas dimensões não obriguem ao uso de teorias de difração.

Para simular a condição de contato variável com o fundo, foram implementadas molas não-lineares. Incorporou-se também o cálculo automático de forças em corpos rígidos esféricos para simular bóias, âncoras e outros aparelhos. O cálculo automático da massa d'água adicionada aos membros foi acrescentado.

Um importante desenvolvimento foi a implementação da prescrição de um deslocamento ao longo do tempo a uma das extremidades do cabo. Estes deslocamentos podem represen-

tar os movimentos de corpos amarrados obtidos em análises globais anteriores. Este procedimento é adotado comumente na análise de linhas de amarração de torres estaiadas e plataformas flutuantes. Os movimentos dados às extremidades do cabo são calculados considerando-se os cabos como molas e sem massa. A análise acoplada incluindo os efeitos não-lineares dos cabos e corpos flutuantes só pode ser feita mediante linearização.

Um estudo importante, no sentido de considerar este acoplamento de efeitos foi realizado por Webster<sup>3 6</sup>, que montou o programa SEADYN/DSSM para este tipo de análise. Esta análise acoplada é feita em duas fases. Na primeira se faz uma análise estática considerando-se todos os efeitos não-lineares e forças de baixa frequência induzidas nos corpos flutuantes pelas ondas. A segunda se constitui numa análise dinâmica no domínio da frequência em que se linearizam os efeitos de ondas e do amortecimento do fluido, através de frequências e velocidades representativas. As análises efetuadas confirmaram algumas hipóteses comumente assumidas como as de que as linhas de amarração têm influência significativa nos movimentos dos corpos amarrados, e que é necessário que se faça uma análise da linha de amarração incluindo todos os efeitos não-lineares. O comportamento global linearizado não apresentou resultados satisfatórios, colocando em dúvida a hipótese de que o sistema apresenta pequenas variações em torno do equilíbrio estático. Para a análise não-linear no domínio do tempo, Webster relata a falta de modelos no tempo para resposta de corpos flutuantes.

A necessidade de se realizarem análises dinâmicas

no domínio do tempo, incluindo todos os efeitos não-lineares, para linhas de amarração de plataformas, tem sido defendida por vários autores [34, 36, 47, 48, 51]. Um estudo desenvolvido por Wilhelmy<sup>3 4</sup> constatou que análises quase-estáticas de linhas de amarração podem levar a sérios erros de dimensionamento. O mesmo autor revela que métodos dinâmicos linearizados baseados em técnicas de superposição modal se revelaram pouco precisos na consideração de grandes deslocamentos e condições de contorno variáveis introduzidas pelo "peso aglutinado" (clump weight) usado em projetos mais modernos, e que tem um efeito dinâmico significativo.

Na completa análise dinâmica não-linear de linhas de amarração, Joanhsson<sup>5 1</sup>, que se utiliza da técnica de superposição modal, revela ser necessário considerar todos os modos de vibração para obter boa precisão na análise. Neste tipo de análise, métodos de integração direta vêm sendo empregados com frequência.

Outro aspecto da análise deste tipo de problema, é da utilização que foi feita neste trabalho do operador implícito de Newmark que além de sua condição de incondicionalmente estável, normalmente possibilita o uso de intervalos de tempo bem maiores que os usados por operadores explícitos. No caso de linhas de amarração como o da seção (5.5), provavelmente devido à característica de grande não-linearidade, o operador implícito não se revelou vantajoso em relação ao explícito empregado por Peyrot na mesma análise. Em relação a este exemplo, ressalta-se a necessidade de se fazer um estudo de variação do modelo utilizado através de variação da malha



e dos valores de rigidez das molas empregadas.

Como meta principal para futuros desenvolvimentos, tem-se o moderno conceito de torres estaiadas que tem sido alvo de muitas investigações [34, 47, 48, 49, 51]. Na análise deste tipo de plataforma os efeitos não-lineares são significativos e podem ser introduzidos por fatores como [47]: a mortecimento devido ao fluido, comportamento dos cabos, momento de tombamento adicional devido ao peso do deck e interação solo-estacas. A análise pode ser efetuada empregando-se o método da superposição modal e o algoritmo de pseudo-forças, cuja validade e aplicabilidade a problemas práticos foi constatada por Hanna<sup>4 7</sup> e Landau<sup>43</sup>. A utilização do método da superposição modal costuma ser bastante vantajosa do ponto de vista do esforço computacional, quando o comportamento de uma estrutura com muitos graus de liberdade pode ser representado por um pequeno número de modos. No entanto, o cálculo de esforços costuma apresentar problemas de precisão devido ao truncamento dos modos superiores. Este problema pode ser contornado através de utilização do método de correção estática dos modos superiores [55].

O programa estará adaptado para análise deste tipo de estrutura através da incorporação de um elemento de pórtico espacial não-linear e do algoritmo de pseudo-forças. A geração automática de um estado de mar sintético baseado na teoria linear ora implementada e compatível com um espectro direcional especificado, também é recomendada por Hanna<sup>4 7</sup>.

Fazendo um pequeno apanhado na literatura de cabos voltada para aplicações em estruturas offshore, principal

mente para cálculo de plataformas, constata-se que o programa desenvolvido possui bastante generalidade e flexibilidade para realizar análises semelhantes às aquelas realizadas através dos sistemas SEADYN [18], NONSAP [20], LINDYN, HATCAN [48] e outros.

Além dos problemas estudados neste trabalho, e - xiste ainda muita pesquisa sendo feita no sentido de incluir outros efeitos físicos nos modelos utilizados.

Isto ocorre com os efeitos de fricção e sucção do solo, que acredita-se contribuem para reduzir a força na âncora e no amortecimento de vibrações longitudinais [20, 34].

As vibrações induzidas por vórtices nos cabos tem sido estudada como um efeito dinâmico importante, que pode causar um acréscimo nos coeficientes de arraste de 1,0 a 1,2 para 1,5 a 2,5 [20]. Segundo Wilhelmy<sup>3 4</sup>, no entanto, sua correta modelação ainda depende de dados práticos confiáveis.

Algum estudo no sentido de se considerar a fadiga nos cabos é realizado por Larsen<sup>2 0</sup>, através do programa STOCCA. No entanto, o próprio autor põe em dúvida os dados utilizados e a validade da aplicação da regra de Miner. Trabalhos recentes de pesquisa nesta área têm sido realizados por autores como Sanders<sup>5 3</sup> e Thorpe<sup>5 4</sup>.

Atualmente está sendo implementada a consideração da não-linearidade física do material através de uma relação constitutiva pré-definida. No que se refere a este aspecto, também existe dificuldade devido à falta de dados práticos [18, 20, 52].

O programa desenvolvido poderá ser utilizado pa-

ra análise de plataformas estaiadas, em sistemas de amarração de bóias, além de outras situações envolvendo cabos como nas fases de transporte e instalação.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Jayaraman, H.B. e Knudson, W.C. - "A Curved Element for the Analysis of Cable Structures" - Computers & Structures. Vol. 14 nº 3.4 pp 325-333, 1981.
2. Ali, S e Shore, S. "Forced Nonlinear Vibration of Sagged Cables" - Proceedings of the International Conf. on Computational and Methods in Nonlinear Mechanics. Austin, Texas, Set. 23-25, 1974, pp 325-337.
3. Webster, R.L. - "Nonlinear Static and Dynamic Response of Underwater Cable Structures Using the Finite Element Method" - Offshore Technology Conference. 2322 (1975).
4. O'Brien, W.T. e Francis, A.J. - "Cable Movements under Two Dimensional Loads" - Journal of the Structural Division - ASCE, Junho, 1964, pp 89-123.
5. O'Brien, W.T. - "General Solution of Suspended Cable Problems" - Journal of the Structural Division-ASCE, Fevereiro, 1967.
6. Peyrot, A.H. e Goulois, A.M. - "Analysis of Flexible Transmission Lines" - Journal of the Structural Div.-ASCE, Maio, 1978.
7. Peyrot, A.H. e Goulois, A.M. - "Analysis of Cable Structures" - Computers & Structures, Vol. 10, pp 805-813.
8. Peyrot, A.H. - "Marine Cable Structures" - Journal of the Structural Div.-ASCE, Dezembro, 1980, pp 2392-2403.
9. Bathe, K.J. - "Finite Element Formulation, Modeling and Solution of Nonlinear Dynamic Problems" - Numerical Methods for Partial Differential Equations, Academic Press Inc. 1979.
10. Landau, L. e Ebecken, N.F.F. - "Método de Superposição Modal para Solução das Equações Incrementais da Dinâmica

Não-Linear" - Computational Methods for Engineering, Vol. 2, nº 2, Agosto, 1981.

11. Landau, L.; Lima, E.C.P.; Ebecken, N.F.F.; Ferrante, A.J. - "A Comparison of Numerical Integration Methods for Dynamic Analysis of Offshore Structures Supported on Pile Foundations" - Offshore Engineering, 1981, Pentech Press.
12. Felippa, C.A. - "Finite Element Analysis of Three-Dimensional Cable Structures" - Proceedings of the International Conference on Computational Methods in Nonlinear Mechanics, Austin, Texas, Setembro 23-25, 1974, pp 311-324.
13. Cerrolaza Rivas, M.E. - "Análise da Resposta de Estruturas Offshore Submetidas à Ação do Mar". Tese de M. Sc. , COPPE/UFRJ, 1980.
14. Bathe, K.J. - "Finite Element Procedures in Engineering Analysis" - Prentice Hall, 1982.
15. Ebecken, N.F.F. - "LORANE-NL - Uma Linguagem Orientada a Análise Estrutural Não-Linear" - Tese de D. Sc. - COPPE/UFRJ, 1977.
16. Lima, E.C.P. - "LORANE-DINA - Uma Linguagem Orientada para a Análise Dinâmica de Estruturas" - Tese de D. Sc. - COPPE/UFRJ, 1977.
17. Clough, R.W. and Penzien, J. - "Dynamics of the Structures" - McGraw-Hill, 1975.
18. Webster, R.L. - "An Application of the Finite Element Method to the Determination of Nonlinear Static and Dynamic Response of Underwater Cable" - Cornell University - Ph.D., 1976.
19. Kretschmer, T.R.; Edgenton, G.A.; Black, S.A.; Albertsen, N.D. - "Seacon II: An Instrumented Trimoor for Evaluating Cable Structure Design Methods" - OTC 2365-1975.

20. Chettiar, C.G. and Naris, S.C. - "Nonlinear Analysis of Mooring Systems" - BOSS'82 - Third International Conf. on the Behavior of Offshore Structures, 1982.
21. Ferrante, A.J.; Sphaier, S.H.; Ellwanger, G.B.; Genatios, C.; Cerrolaza, M. - "On the Use of Morison Equation for Steel Jacket Structures" - Offshore Engineering, Vol. 3, 1981, Pentech Press.
22. Ozdemir, H. - "A Finite Element Approach for Cable Problems". International Journal of Solids Structures. Vol. 15, pp 427-437 - 1979.
23. Gambhir, M.L. e Batchelor, B.V. - "A Finite Element for 3-D Prestressed Cablenets". International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 11 - 1699-1718 (1977).
24. Russel, J.J. e Henghold, W.M. - "Equilibrium and Natural Frequencies of Cable Structures (A Nonlinear Finite Element Approach)". Computers & Structures - Vol. 6, pp 267-271. Pergamon Press - 1976.
25. Schrefler, B.A.; Odorizzi, S. e Wood, R.D. - "A Total Lagrangian Geometrically Non-linear Analysis of Combined Beam and Cable Structures". Computers & Structures, Vol. 17, nº 1, pp 115-127. 1983.
26. Griffiths, J.A.; Alzheimer, T.M. e Bampton, M.C.C. - "Large Displacements Analysis of Cable Structures" - Nonlinear Finite Element Analysis and ADINA Report 82448-9. Editado por Bathe, K.J.-MIT. (1979).
27. Leonard, J.W. e Recker, W.W. - "Nonlinear Dynamics of Cables with Low Initial Tension". Journal of the Engineering Mechanics Division-ASCE. April, 1972, pp 293-309.
28. Leonard, J.W. - "Nonlinear Dynamics of Curved Cable Elements". Journal of the Engineering Mechanics Division-ASCE. June, 1973.

29. Argyris, J.H. e Scharpf, D.W. - "Large Deflection Analysis of Prestressed Networks". Journal of the Structural Division-ASCE. March, 1972, pp 633-654.
30. Creus, G.J. e Groehs, A.G. - "Análise Estática e Dinâmica de Estruturas de Cabos". XXII Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural (1983).
31. Bathe, K.J. e Cimento, A.P. - "Some Practical Procedures for the Solution of Nonlinear Finite Element Equations". Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 22 (1980) - pp 59-85.
32. Carson, W.W. e Emery, A.F. - "An Energy Method Determination of Large Cable Dynamics". Transaction of the ASME. June, 1976.
33. Ebecken, N.F.F. - "Teoria de Ondas. Ação do Mar em Estruturas de Jaquetas". - Curso de Doutorado. Análise Avançada de Estruturas Offshore I (1982).
34. Wilhelmy, V.; Fjeld, S.; Schneider, S. - "Non-Linear Response Analysis of Anchorage Systems for Compliant Deep Water Platforms" - OTC 4051 (1981).
35. Berteaux - Buoy Engineering - N.Y., 1976.
36. Webster, R.L. e McCreight, W.R. - "Analysis of Deep Sea Moor and Cable Structures". OTC 3623 (1979).
37. Cook, R.D. - Concepts and Applications of Finite Element Analysis. John Wiley & Sons Inc., 1974.
38. Peyrot, A.H.; Lee, J.W.; Jensen, H.G.; Osteras, J.D. - "Application of Cable Elements Concept to a Transmission Line with Cross Rope Suspension Structures". IEE. Transactions on Power Apparatus and Systems. Vol. PAS-100, nº 7, Julho, 1981.

39. Landau, L; Ebecken, N.F.F.; Lima, E.C.P. - "Análise Dinâmica de Estruturas Offshore". 1º Seminário de Uso do Computador na Engenharia e na Gerência de Implantação de Empreendimentos Industriais. pp - 199-221 (1982).
40. Nickell, R.E. - "Nonlinear Dynamics by Mode Superposition". Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. pp 107-129 (1976).
41. Stricklin, J.A.; Haisler, W.E.; Von Riesenmann, W.A. - "Comments on Nonlinear Transient Structural Analysis". Finite Element Analysis of Transient Nonlinear Behavior. AMD. Vol. 14, ASME, New York, 1975.
42. Landau, L.; Ebecken, N.F.F.; Prates de Lima, E.C. - "Comparação dos Métodos de Superposição Modal para a Análise Dinâmica Não-Linear".
43. Landau, L. - "Análise do Comportamento Dinâmico Não-Linear de Estruturas pelo Método de Superposição Modal". Tese de DSc. COPPE/UFRJ (1983).
44. Przemieniecki, J.S. - "Theory of Matrix Structural Analysis". McGraw-Hill. 1968.
45. Landau, L. e Ebecken, N.F.F. - "Método de Superposição Modal para a Solução das Equações Incrementais da Dinâmica Não-Linear". IV Simpósio sobre Sistemas Computacionais para Engenharia. Curitiba (1980).
46. Skop, R.A. e Mark, J. - "A FORTRAN IV Program for Computing the Static Deflection of Structural Cable Arrays, Naval Research Laboratory. Report 7640, Washington, D.C. , Agosto, 1973.
47. Hanna, S.Y.; Mangiavacchi, A.; Sukendra, R. - "Nonlinear Dynamic Analysis of Guyed Tower Platforms". Journal of Energy Resources Technology. Junho-1983. Vol. 105/205.



48. Larsen, C.M. e Fylling, F.J. - "Dynamic Behaviour of Anchor Lines". BOSS'82 - Third International Conference on the Behaviour of Offshore Structures, 1982.
49. Finn, L.D. - "A New Deepwater Offshore Platform - The Guyed Tower". OTC 2688 (1976).
50. Ashford, R.A. e Wood, W.L. - "Numerical Integrations of the Motions of a Tethered Bnoyant Platform". International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 13, pp 165-168 (1978).
51. Johansson, I. - "A Finite Element Model for Dynamic Analysis of Mooring Cables". Tese PhD. MIT (1976).
52. Creus, G.J. - "Análise Estática e Dinâmica de Estruturas de Cabos". - Seminário para o DSc. COPPE/UFRJ. (1981).
53. Sanders, D.R.; Dominguez, R.F.; Lai, N.W. e Ho K.C. - "Predicting Mooring System Fatigue Life by Probabilistic Methods". - OTC 4637 (1983).
54. Thorpe, T.W. e Rance, A. - "The Tensile Fatigue of Wire Rope: A New Approach". OTC 4638 (1983).
55. Lima Torres, A.L.F. e Lima, E.C.P. - "A Contribuição dos Modos Superiores na Análise Dinâmica de Estruturas Reticuladas". 2º Simpósio Brasileiro sobre Tubulações e Vasos de Pressão. SIBRAT, Salvador, Novembro, 1982.
56. Mourelle, M.M. e Ebecken, N.F.F. - "A Computational System for the Analysis of Marine Structures with Cable Arrays" - 3º Simpósio de Engenharia Offshore, Rio de Janeiro, Setembro 1983.
57. Mourelle, M.M., Ebecken, N.F.F. e Lima, E.C.P. - "Determinação das Reações Impostas pelos Mangotes Flexíveis "CO - FLEXIP" nas Estruturas de Suporte de Conectores do Sistema de Produção Antecipada de Piraúna. - COPPE/UFRJ - Relatório nº 15191, 1983.

## APÊNDICE A

## RELAÇÕES ADICIONAIS PARA CATENÁRIA ELÁSTICA

Dedução das expressões das projeções horizontal (H) e vertical (V), e do comprimento final (L), como funções das forças nas extremidades do cabo, e levando-se em conta pequenas deformações.

- Projeção Horizontal (H):

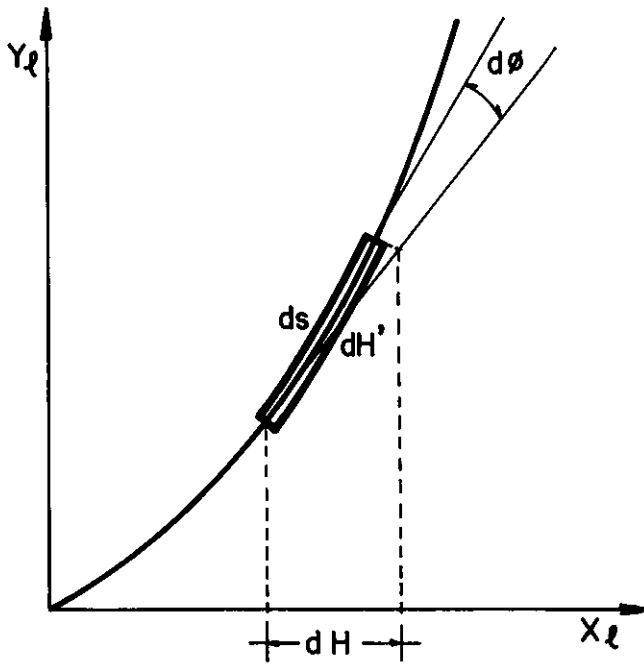


Figura A.1

De acordo com a figura (A.1) pode-se escrever:

$$dH = dH' \cos \phi \quad (A.1)$$

$$dH' = ds \underbrace{\cos d\phi}_{\approx 1} = dL + \epsilon dL \quad (A.2)$$

Considerando-se a lei de Hooke:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{T}{EA} \quad (A.3)$$

$$dH' = dL + \frac{T}{EA} dL \quad (A.4)$$

Mas  $dL = ?$

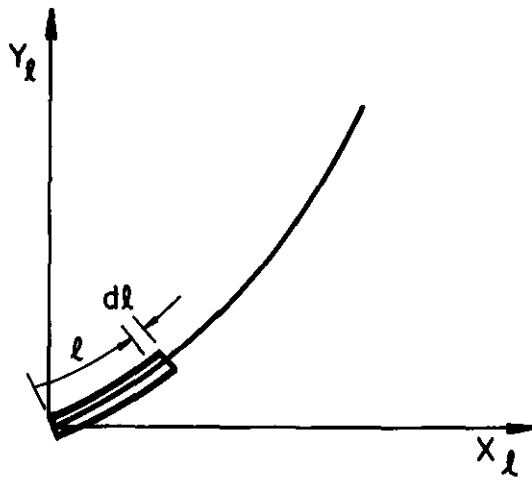


Figura A.2

A força horizontal é constante:

$$\cos \phi = \frac{F'_3}{T} = \frac{-F_1}{T};$$

$$\therefore T = \frac{-F_1}{\cos \phi} \quad (A.5)$$

Equilíbrio na direção y-local, fornece:

$$T \sin \phi = -F_2 + wL \quad (A.6)$$

Substituindo a eq. (A.5) na eq. (A.6):

$$-F_1 \operatorname{tg} \phi = -F_2 + wL$$

$$\Rightarrow L = \frac{F_2}{w} - \frac{F_1}{w} \operatorname{tg} \phi \quad (A.7)$$

Pela expressão (A.7) tem-se que  $L=L(\phi)$ . Diferenç

ciando:

$$dL = \frac{-F_1}{w} \sec^2 \phi d\phi \quad (A.8)$$

Voltando à expressão de  $dH$ , eq. (A.1), e considerando as expressões (A.2), (A.4) e (A.8):

$$dH = \underbrace{\cos \phi \cdot \left( \frac{-F_1}{w} \right) \cdot \sec^2 \phi d\phi}_{\text{Parcela 1}} + \underbrace{\frac{T}{AE} \cos \phi dL}_{\text{Parcela 2}} \quad (A.9)$$

Passa-se à integração das duas parcelas da expressão (A.9):

- Parcela 1:

$$dH_1 = \frac{-F_1}{w} \cdot \frac{d\phi}{\cos \phi}$$

$$H_1 = \int_{\phi_I}^{\phi_J} \frac{-F_1}{w} \cdot \frac{d\phi}{\cos \phi}$$

$$H_1 = \frac{-F_1}{w} \left\{ \ln (\sec \phi + \operatorname{tg} \phi) \right\} \bigg|_{\phi_I}^{\phi_J}$$

$$H_1 = \frac{-F_1}{w} \left\{ \ln \frac{(\operatorname{tg} \phi_J + \sec \phi_J)}{(\operatorname{tg} \phi_I + \sec \phi_I)} \right\}$$

Pode-se expressar  $\operatorname{tg} \phi_I$ ,  $\operatorname{tg} \phi_J$ ,  $\sec \phi_I$  e  $\sec \phi_J$  como funções das forças nas extremidades.

$$\operatorname{tg} \phi_I = \frac{F_2}{F_1} \quad (A.10)$$

$$\sec \phi_I = \frac{T_I}{-F_1} \quad (A.11)$$

$$\operatorname{tg} \phi_J = \frac{F_4}{-F_1} \quad (\text{A.12})$$

$$\sec \phi_J = \frac{T_J}{-F_1} \quad (\text{A.13})$$

$$\therefore H_1 = \frac{-F_1}{w} \ln \left( \frac{F_4 + T_J}{T_I - F_2} \right) \quad (\text{A.14})$$

- Parcela 2:

$$dH_2 = \frac{T}{AE} \cos \phi \, dL, \text{ onde } T \cos \phi = -F_1 = ct^e$$

$$\Rightarrow dH_2 = \frac{-F_1}{AE} \, dL$$

$$\therefore H_2 = \frac{-F_1}{AE} \int_0^{L_u} dL$$

$$H_2 = \frac{-F_1 \cdot L_u}{AE} \quad (\text{A.15})$$

Somando as expressões (A.14) e (A.15) tem-se a expressão total para H:

$$H = -F_1 \left\{ \frac{L_u}{EA} + \frac{1}{w} \ln \left( \frac{F_4 + T_J}{T_I - F_2} \right) \right\} \quad (\text{A.16})$$

- Projeção Vertical (V):

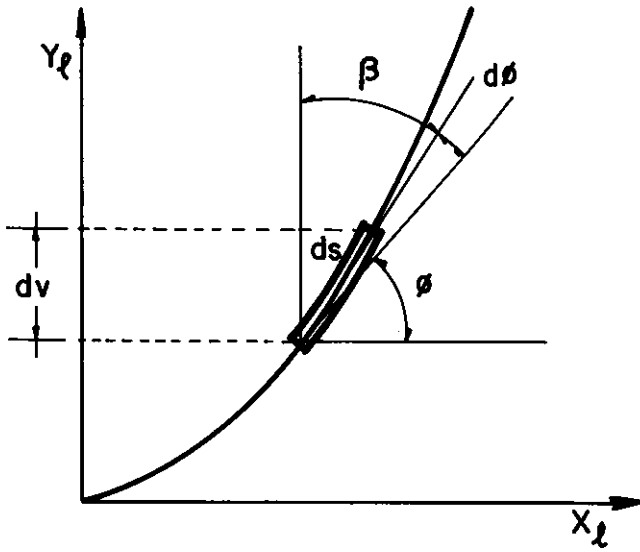


Figura A.3

$$dV = ds \cos \beta \quad (A.17)$$

$$\cos \beta = \text{sen} (\phi + d\phi)$$

$$\cos \beta = \text{sen } \phi \underbrace{\cos d\phi}_{\approx 1} + \cos \phi \underbrace{\text{sen } d\phi}_{\approx d\phi}$$

$$\therefore \cos \beta = \text{sen } \phi + \cos \phi d\phi \quad (A.18)$$

Substituindo-se (A.18) em (A.17), e desprezando-se os termos de ordem superior:

$$dV = \text{sen } \phi (dL + \frac{T}{EA} dL) \quad (A.19)$$

Dividindo-se em 2 parcelas:

- Parcela 1:

$$dV_1 = \text{sen } \phi dL$$

Entrando com a expressão (A.8):

$$dV_1 = \frac{-F_1}{w} \cdot \frac{\sin \phi}{\cos^2 \phi} d\phi$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{-F_1}{w} \int_{\phi_I}^{\phi_J} \frac{\sin \phi}{\cos^2 \phi} d\phi =$$

$$V_1 = \frac{-F_1}{w} \left\{ \sec \phi \right|_{\phi_I}^{\phi_J} \right\}$$

Utilizando as expressões (A.11) e (A.13):

$$V_1 = \frac{1}{w} (T_J - T_I) \quad (A.20)$$

- Parcela 2:

$$dV_2 = \sin \phi \cdot \frac{T}{EA} \cdot dL$$

Pelas equações (A.5) e (A.6) tem-se que:

$$\sin \phi = -F_1 \operatorname{tg} \phi$$

$$\Rightarrow dV_2 = \frac{1}{EA} (-F_1) \operatorname{tg} \phi \left( \frac{-F_1}{w} \right) \sec^2 \phi d\phi$$

$$V_2 = \frac{F_1^2}{wEA} \int_{\phi_I}^{\phi_J} \frac{\sin \phi}{\cos^3 \phi} d\phi$$

Calculando-se a integral:

$$V_2 = \frac{F_1^2}{2wEA} \left\{ \sec^2 \phi_J - \sec^2 \phi_I \right\}$$

Entrando-se com as expressões (A.11) e (A.13):

$$V_2 = \frac{1}{2wEA} (T_J^2 - T_I^2) \quad (A.21)$$

Somando as parcelas 1 e 2, equações (A.20) e (A.21),

tem-se:

$$V = \frac{1}{2wEA} (T_J^2 - T_I^2) + \frac{T_J - T_I}{w} \quad (A.22)$$

- Cálculo do Comprimento Total (L):

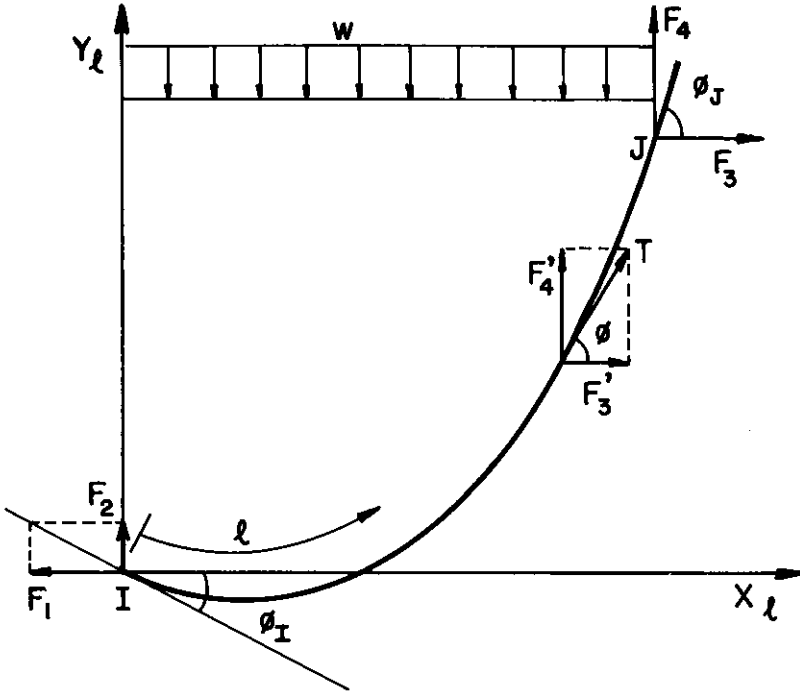


Figura A.4

$$L = L_u + \Delta L \quad (A.23)$$

$$\Delta L = \int_0^L u \, \epsilon \, dL \quad (A.24)$$

Usando-se as expressões (A.3) e (A.8), tem-se:

$$\Delta L = \frac{1}{EA} \int_{\phi_I}^{\phi_J} T \left( \frac{-F_1}{w} \right) \sec^2 \phi \, d\phi$$

Considerando a expressão (A.5), obtêm-se:

$$\Delta L = \frac{F_1}{EA w} \int_{\phi_I}^{\phi_J} \sec^3 \phi \, d\phi$$



Onde:

$$\int_{\phi_I}^{\phi_J} \sec^3 \phi \, d\phi = \left. \frac{\sec \phi \, \operatorname{tg} \phi}{2} \right|_{\phi_I}^{\phi_J} +$$

$$+ \left. \frac{1}{2} \ln (\sec \phi + \operatorname{tg} \phi) \right|_{\phi_I}^{\phi_J}$$

Utilizando-se as expressões (A.10), (A.11), (A.12) e (A.13) para obter a expressão resultante da integração como função das forças nas extremidades, tem-se:

$$\Delta L = \frac{1}{2EA_w} \left[ T_I F_2 + T_J F_4 + F_1^2 \ln \left( \frac{F_4 + T_J}{T_I - F_2} \right) \right] \quad (\text{A.25})$$

Substituindo-se em (A.23) tem-se a expressão para o comprimento total:

$$L = L_u + \frac{1}{2EA_w} \left[ T_I F_2 + T_J F_4 + F_1^2 \ln \left( \frac{F_4 + T_J}{T_I - F_2} \right) \right] \quad (\text{A.26})$$

## APÊNDICE B

## CÁLCULO DOS TERMOS DA MATRIZ DE FLEXIBILIDADE

$$\xi_1 = \frac{\partial H}{\partial F_1} ; \quad \xi_2 = \frac{\partial H}{\partial F_2} ; \quad \xi_3 = \frac{\partial V}{\partial F_1} ; \quad \xi_4 = \frac{\partial V}{\partial F_2} \quad (\text{B.1})$$

onde

$$H = -F_1 \left[ \frac{L_u}{EA} + \frac{1}{w} \cdot \ln \left( \frac{F_4 + T_J}{T_I - F_2} \right) \right] \quad (\text{B.2})$$

$$V = \frac{1}{2EAw} (T_J^2 - T_I^2) + \frac{T_J - T_I}{w}$$

Como mostrado na seção (2.3), as variáveis  $F_3$ ,  $F_4$ ,  $T_I$  e  $T_J$  que aparecem nas expressões de  $H$  e  $V$  acima, podem ser escritas como função de  $F_1$  e  $F_2$ .

É de utilidade, para simplicidade e maior clareza, que se calcule as derivadas parciais dessas variáveis em relação a  $F_1$  e  $F_2$ .

$$\frac{\partial F_4}{\partial F_1} = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial T_I}{\partial F_1} = \frac{\partial}{\partial F_1} (\sqrt{F_1^2 + F_2^2}) = \frac{F_1}{T_I} \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial T_J}{\partial F_1} = \frac{\partial}{\partial F_1} (\sqrt{F_1^2 + F_4^2}) = \frac{F_1}{T_J} \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial F_2} = -1 \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial T_I}{\partial F_2} = \frac{F_2}{T_I} \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial T_J}{\partial F_4} = \frac{\partial}{\partial F_2} (\sqrt{F_3^2 + (-F_2 + w\ell_u)^2}) = \frac{-F_4}{T_J} \quad (\text{B.8})$$

- Dedução de  $\xi_1$ :

$$\xi_1 = \frac{\partial H}{\partial F_1} = \underbrace{\frac{-L_u}{EA} - \frac{1}{w} \ell_n \left( \frac{F_4 + T_J}{T_I - F_2} \right)}_{= \frac{H}{F_1}} -$$

$$- \frac{F_1}{w} \cdot \frac{\partial}{\partial F_1} \cdot \ell_n \left( \frac{F_4 + T_J}{T_I - F_2} \right)$$

$$\xi_1 = \frac{H}{F_1} - \frac{F_1}{w} \cdot \left\{ \left( \frac{T_I - F_2}{F_4 + T_J} \right) \left[ (F_4 + T_J) \left( \frac{\partial T_I}{\partial F_1} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - (T_I - F_2) \left( \frac{\partial T_J}{\partial F_1} \right) \right] \div (T_I - F_2)^2 \right\}$$

Usando as expressões já calculadas para as derivadas parciais:

$$\xi_1 = \frac{H}{F_1} - \frac{F_1^2}{w} \cdot \left\{ \frac{1}{(T_I - F_2) T_I} - \frac{1}{(F_4 + T_J) T_J} \right\} \quad (B.9)$$

$$\text{mas } F_1^2 = T_I^2 - F_2^2 = (T_I - F_2) (T_I + F_2)$$

$$\text{ou } F_1^2 = T_J^2 - F_4^2 = (T_J - F_4) (T_J + F_4)$$

Substituindo na expressão (B.9) e simplificando:

$$\xi_1 = \frac{H}{F_1} + \frac{1}{w} \left[ \frac{F_4}{T_J} + \frac{F_2}{T_I} \right] \quad (B.10)$$

- Dedução de  $\xi_2$ :

$$\xi_2 = \frac{\partial H}{\partial F_2} = \frac{-F_1}{w} \cdot \frac{\partial}{\partial F_2} \ell_n \left( \frac{F_4 + T_J}{T_I - F_2} \right)$$

$$\xi_2 = \frac{-F_1}{w} \left\{ \frac{T_I - F_2}{F_4 + T_J} \left[ (F_4 + T_J) \left( \frac{\partial T_I}{\partial F_2} - 1 \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - (T_I - F_2) \left( \frac{\partial F_4}{\partial F_2} + \frac{\partial T_J}{\partial F_2} \right) \right] \div (T_I - F_2)^2 \right\}$$

Substituindo as expressões das derivadas parciais, obtêm-se:

$$\xi_2 = \frac{-F_1}{w} \left\{ \frac{1}{(T_I - F_2)(F_4 + T_J)} \left[ (T_I - F_2) \left( -1 - \frac{F_4}{T_J} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - (F_4 + T_J) \left( \frac{F_2}{T_I} - 1 \right) \right] \right\} \quad (B.11)$$

Fazendo simplificações chega-se a:

$$\xi_2 = \frac{F_1}{w} \left\{ \frac{1}{T_J} - \frac{1}{T_I} \right\} \quad (B.12)$$

- Dedução de  $\xi_3$ :

$$\xi_3 = \frac{\partial V}{\partial F_1} = \frac{1}{2EAw} \left[ \frac{\partial}{\partial F_1} (T_J^2 - T_I^2) \right] + \left( \frac{\partial T_J}{\partial F_1} - \frac{\partial T_I}{\partial F_1} \right) \frac{1}{w} \\ = \frac{1}{2EAw} \left[ 2 T_J \cdot \frac{\partial T_J}{\partial F_1} - 2 T_I \cdot \frac{\partial T_I}{\partial F_1} \right] + \left( \frac{\partial T_J}{\partial F_1} - \frac{\partial T_I}{\partial F_1} \right) \frac{1}{w}$$

Substituindo as expressões (B.3) a (B.8) na equação acima:

$$\xi_3 = \frac{1}{2EAw} \underbrace{\left( 2 T_J \cdot \frac{F_1}{T_J} - 2 T_I \cdot \frac{F_1}{T_I} \right)}_{= 0} + \left( \frac{F_1}{T_J} - \frac{F_1}{T_I} \right) \frac{1}{w} \quad (B.13)$$

$$\therefore \xi_3 = \frac{F_1}{w} \left\{ \frac{1}{T_J} - \frac{1}{T_I} \right\} \quad (B.14)$$

- Dedução de  $\xi_4$ :

$$\begin{aligned}\xi_4 &= \frac{\partial V}{\partial F_2} = \frac{1}{2EAw} \left[ \frac{\partial}{\partial F_2} (T_J^2 - T_I^2) \right] + \frac{1}{w} \cdot \frac{\partial}{\partial F_2} (T_J - T_I) \\ &= \frac{1}{2EAw} \left[ 2 T_J \cdot \frac{\partial T_J}{\partial F_2} - 2 T_I \cdot \frac{\partial T_I}{\partial F_2} \right] + \frac{1}{w} \left( \frac{\partial T_J}{\partial F_2} - \frac{\partial T_I}{\partial F_2} \right)\end{aligned}$$

Substituindo as expressões (B.3) a (B.8) na equação acima:

$$\begin{aligned}\xi_4 &= \frac{1}{2EAw} \left[ 2 T_J \frac{(-F_4)}{T_J} - 2 T_I \frac{F_2}{T_I} \right] + \frac{1}{w} \left( \frac{-F_4}{T_J} - \frac{F_2}{T_I} \right) \\ &= \frac{1}{EAw} \underbrace{\left[ -F_4 - F_2 \right]}_{= -w\ell_u} - \frac{1}{w} \left( \frac{F_4}{T_J} + \frac{F_2}{T_I} \right) \quad (B.15)\end{aligned}$$

$$\therefore \xi_4 = - \frac{\ell_u}{EA} - \frac{1}{w} \left( \frac{F_4}{T_J} + \frac{F_2}{T_I} \right) \quad (B.16)$$